ÁLGEBRA LINEAL

GEOMETRÍA

ESPACIO VECTORIAL DE LOS VECTORES LIBRES: V_3

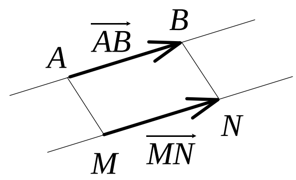
Se llama "vector fijo" de origen A y extremo B al segmento orientado $\overrightarrow{AB}$. Si el origen y el extremo coinciden, hablamos del "vector nulo": $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

Un vector fijo queda caracterizado por su:

$$\begin{cases} \text{"norma" (o "módulo"):} \quad \|\overrightarrow{AB}\| = |\overrightarrow{AB}| \\ \text{"dirección": la de la recta } AB \\ \text{"sentido": de } A \text{ a } B \end{cases}$$

En el conjunto de los vectores fijos del espacio se define la "relación de equipolencia": dos vectores fijos son equipolentes si ambos son nulos o, en caso contrario,

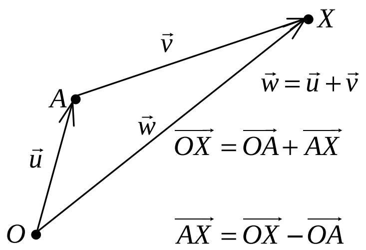
$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \text{"misma norma":} & \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{MN}\| \\ \text{"misma dirección":} & \overrightarrow{AB} \,|\,|\, \overrightarrow{AB} \\ \text{"mismo sentido":} & \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MN} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} (A,B,N,M) \\ \text{paralelogramo} \end{array}$$

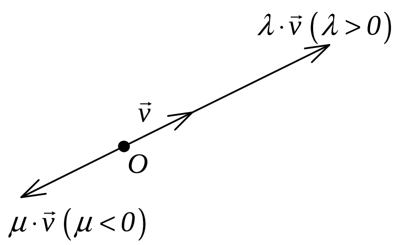


Un "vector libre" $\vec{v}$ es el conjunto formado por un vector fijo $\overrightarrow{AB}$ y todos sus equipolentes. $\overrightarrow{AB}$ es un "representante" de $\vec{v}$. El conjunto de todos los vectores libres del espacio se representa por V_3. Los vectores libres se identifican con sus representantes.

OPERACIONES CON VECTORES LIBRES

Se definen la suma de vectores libres y el producto de un escalar por un vector como es sabido:





PROPIEDADES DE LA SUMA DE VECTORES LIBRES (INTERNA)

1. Asociativa: $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} \quad [=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}]$
2. Vector nulo (neutro de la suma): $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$
3. Vector opuesto: $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$
   $\left[\vec{u}=\overrightarrow{AB} \quad \leftrightarrow \quad -\vec{u}=\overrightarrow{BA}\right]$
4. Conmutativa: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

PROPIEDADES DEL PRODUCTO POR UN ESCALAR (EXTERNO)

1. Distributiva respecto a la suma de vectores:
$$(\forall \lambda \in \mathbb{R})(\forall \vec{u},\vec{v} \in V_3) \qquad \lambda \cdot (\vec{u}+\vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$$
2. Distributiva respecto a la suma de escalares:
$$(\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R})(\forall \vec{u} \in V_3) \qquad (\lambda+\mu)\cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$$
3. Pseudoasociativa (Asociatividad mixta):
$$(\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R})(\forall \vec{u} \in V_3) \qquad (\lambda \cdot \mu)\cdot \vec{u} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u})$$
4. $1 \in \mathbb{R}$ es un operador neutro:
$$(\forall \vec{u} \in V_3) \qquad 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$$

$\left[V_3(\mathbb{R}); +, \cdot, \mathbb{R}\right]$ es un **espacio vectorial** sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los número reales: el espacio vectorial de los vectores libres del espacio tridimensional.

COMBINACIONES LINEALES DE VECTORES LIBRES. (Dependencia e independencia lineal)

•Si $\vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V_3$, se dice que $\vec{w}$ es "combinación lineal" de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si existen dos escalares $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{w} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$.

•El vector nulo es combinación lineal de cualquier sistema de vectores, pues: $\vec{0} = 0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{w}$. Esta es la "combinación lineal nula trivial".

•Un conjunto de vectores libres $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ se dice que es "linealmente independiente" ("libre") si la única combinación lineal nula de ellos es la trivial. Esto equivale a que ninguno de los vectores se puede escribir como combinación lineal de los demás.

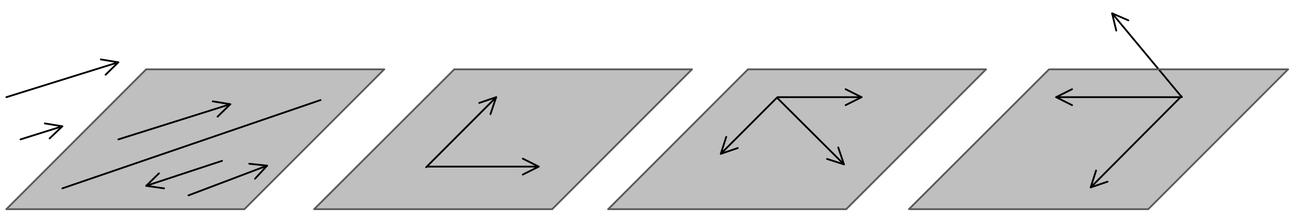
Sean $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores libres de V_3. Entonces:

- ♦ $\{\vec{u}\}$ es linealmente independiente $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ es no nulo.
- ♦ $\{\vec{u},\vec{v}\}$ es linealmente independiente $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son no nulos y no colineales (no paralelos).
- ♦ $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ es linealmente independiente $\Leftrightarrow$ los tres son no nulos y no coplanarios.

•Un conjunto de vectores libres $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ es "linealmente dependiente" ("ligado") si existen combinaciones lineales nulas no triviales (por ejemplo: $3 \cdot \vec{u} - \vec{v} + 5 \cdot \vec{w} = \vec{0}$ .Esto equivale a que alguno de los vectores se puede escribir como combinación lineal de los demás ($\vec{v} = 3 \cdot \vec{u} + 5 \cdot \vec{w}$).

Sean $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ tres vectores libres de V_3. Entonces:

- ♦ $\{\vec{u}\}$ es linealmente dependiente $\Leftrightarrow$ $\vec{u}$ es nulo.
- ♦ $\{\vec{u},\vec{v}\}$ es linealmente dependiente $\Leftrightarrow$ alguno es nulo o son colineales (paralelos).
- ♦ $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ es linealmente dependiente $\Leftrightarrow$ alguno es nulo o son coplanarios.



$\{\vec{u}_i\}$ *colineales*	$\{\vec{u},\vec{v}\}$ *no colineales*	$\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ *coplanarios*	$\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ *no coplanarios*
l. dep.	*l. indep.*	*l. dep.*	*l. indep.*
$rg(\vec{u}_i) = 1$	$rg(\vec{u},\vec{v}) = 2$	$rg(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 2$	$rg(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 3$

•En V_3, el máximo número de vectores linealmente independientes es 3.

BASES (ORDENADAS) DE V_3. (Componentes de un vector libre)

Una base (ordenada) de V_3 es una terna ordenada de vectores libres no nulos y no coplanarios (linealmente independientes) $\mathcal{B}=\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

•Todo vector $\vec{v}$ de V_3 se puede expresar de modo único como combinación lineal de los vectores de una base: $\vec{v}=v_1\cdot\vec{e}_1+v_2\cdot\vec{e}_2+v_3\cdot\vec{e}_3=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$.
Se suele escribir $\vec{v}=\left(v_1,v_2,v_3\right)=\left(x,y,z\right)$. Éstas son las "componentes" del vector $\vec{v}$ respecto a la base $\mathcal{B}$.

OPERACIONES CON VECTORES A TRAVÉS DE SUS COMPONENTES

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\left(u_1,u_2,u_3\right)\\ \vec{v}=\left(v_1,v_2,v_3\right)\\ \lambda\in\mathbb{R}\end{array}\right\}\rightarrow\begin{cases}\vec{u}+\vec{v}=\left(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3\right)\\ \lambda\cdot\vec{u}=\left(\lambda\cdot u_1,\lambda\cdot u_2,\lambda\cdot u_3\right)\end{cases}$$

EJEMPLO

Considera los vectores $\vec{u}=(1,1,0),\vec{v}=(1,0,1)\ y\ \vec{w}=(0,1,1)$.

a) Demuestra que son linealmente independientes [por lo tanto, forman una base].

b) Expresa el vector $\vec{x}=\left(-1,6,1\right)$ como combinación lineal de $\left\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right\}$.

Para el apartado a) se suele proceder de una de estas tres formas equivalentes:

a1) Mediante la definición: supongamos que existe una combinación lineal nula

$$\lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{v}+\nu\cdot\vec{w}=\vec{0};$$

es decir

$$\lambda\cdot\left(1,1,0\right)+\mu\cdot\left(1,0,1\right)+\nu\cdot\left(0,1,1\right)=\left(0,0,0\right).$$

Entonces:

$$\left(\lambda+\mu,\lambda+\nu,\mu+\nu\right)=\left(0,0,0\right)\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\lambda+\mu=0\\ \lambda+\nu=0\\ \mu+\nu=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=-\mu\\ -\mu+\nu=0\\ \mu+\nu=0\end{cases}\Rightarrow 2\nu=0\Rightarrow\lambda=\mu=\nu=0$$

Es decir, la única combinación lineal nula posible es la trivial: luego son l. independientes.

a2) Mediante operaciones elementales: escribamos una matriz que tenga por filas las componentes de los vectores dados y hallemos una matriz escalonada equivalente por filas

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Esto indica que rg(A) = rg($\vec{u},\vec{v},\vec{w}$) = 3, y los vectores dados son l. independientes.

a3) Calculando el determinante de A:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-2\neq0\quad\Leftrightarrow\quad\text{las tres filas son linealmente independientes.}$$

b) Expresemos $\vec{x}$ como combinación lineal de $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$:

$$\vec{x}=\lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{v}+\nu\cdot\vec{w}$$
$$(-1,6,1)=\lambda\cdot(1,1,0)+\mu\cdot(1,0,1)+\nu\cdot(0,1,1)$$
$$(-1,6,1)=(\lambda+\mu,\lambda+\nu,\mu+\nu)\quad\begin{cases}\lambda+\mu=-1\\ \lambda+\nu=6\\ \mu+\nu=1\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\lambda=2;\ \mu=-3;\ \nu=4$$

Así:

$$\vec{x}=2\cdot\vec{u}-3\cdot\vec{v}+4\cdot\vec{w}$$
$$(-1,6,1)=2\cdot(1,1,0)-3\cdot(1,0,1)+4\cdot(0,1,1)$$

[Ejercicios 1, 2, 3, 4, 5]

ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO DE LOS VECTORES LIBRES: [V_3,·]

Si al espacio vectorial V_3 se le dota de un producto escalar se obtiene el espacio vectorial euclídeo [V_3; ·]. Es decir, el propio V_3 provisto de una nueva herramienta: el "producto escalar". Esto permite abordar nuevos problemas: los problemas euclídeos (problemas métricos).

PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES LIBRES

El producto escalar es una función que a cada par de vectores libres $\vec{u},\vec{v}\in V_3$ le asocia un número real $\vec{u}\cdot\vec{v}\in\mathbb{R}$ (es decir, un escalar):

$$(\vec{u},\vec{v})\mapsto f(\vec{u},\vec{v})=\vec{u}\cdot\vec{v}=\begin{cases}0, & \text{si alguno es nulo}\\ \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right), & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

PROPIEDADES

Bilineal:	$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$	(Distributivo por izquierda)
	$(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$	(Distributivo por la derecha)
	$(\lambda\cdot\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(\lambda\cdot\vec{v})=\lambda\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})$	(Asociatividad mixta)
Simétrica:	$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$	(Conmutativo)
Positividad:	$\vec{u}\cdot\vec{u}\geq 0 \quad (\vec{u}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0})$	

Consecuencias

$$(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$$
$$(\vec{a}-\vec{b})^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$$
$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{a}^2-\vec{b}^2$$

NORMA DE UN VECTOR

Puesto que $\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{u}}\right)=\cos 0=1$ se tiene que $\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{u}\|=\|\vec{u}\|^2$, luego

$$\boxed{\|\vec{u}\|=+\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}}$$

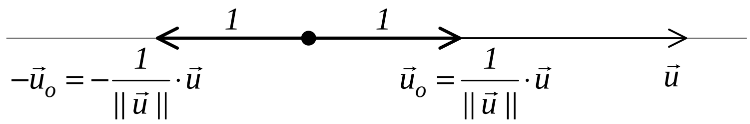
$$\|\lambda\cdot\vec{v}\|=|\lambda|\cdot\|\vec{v}\|$$

VECTORES UNITARIOS. NORMALIZACIÓN DE UN VECTOR

Un vector es unitario si su norma es 1: $\|\vec{u}\| = 1$.

Si un vector no nulo $\vec{u} \neq \vec{0}$ es no unitario, se puede obtener un vector unitario, $\vec{u}_o$, con la misma dirección y sentido que $\vec{u}$, sin más que multiplicarlo por el inverso de su norma:

$$\boxed{\vec{u}_o = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}}$$



Se dice entonces que se ha normalizado el vector $\vec{u}$.
También el vector $-\vec{u}_o$ es unitario con la misma dirección que $\vec{u}$, pero con sentido contrario.

VECTORES ORTOGONALES (PERPENDICULARES)

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son <u>ortogonales</u> si su producto escalar es nulo.

El vector nulo es ortogonal a cualquier otro.

Si $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ son no nulos, decir que son ortogonales equivale a decir que son perpendiculares:

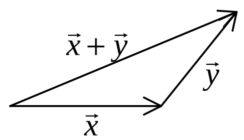
$$\left(\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \cos 90^o = 0\right) \qquad \vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Desigualdad de CAUCHY−SCHWARZ

$$\boxed{\left|\vec{x} \cdot \vec{y}\right| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \qquad \left(Se\ da\ la\ igualdad \quad \Leftrightarrow \quad \{\vec{x},\vec{y}\}\ l.dependiente\right)$$

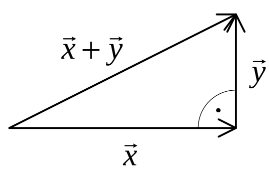
Desigualdad triangular (de MINKOWSKI)

$$\boxed{\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|}$$



Teorema de PITÁGORAS

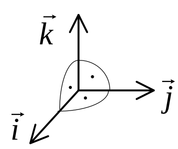
$$\boxed{\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2}$$



BASES ORTONORMALES

Una base $\mathcal{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ es ortonormal si sus vectores son ortogonales dos a dos y unitarios:

$$\mathcal{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)\ ortonormal \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \end{cases}$$



PRODUCTO ESCALAR EN BASES ORTONORMALES

Sea $\mathcal{B}=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ una BOTN y sean $\vec{u}=a\cdot\vec{i}+b\cdot\vec{j}+c\cdot\vec{k}$ y $\vec{v}=l\cdot\vec{i}+m\cdot\vec{j}+n\cdot\vec{k}$ dos vectores de componentes $\vec{u}=(a,b,c)$ y $\vec{v}=(l,m,n)$ respecto a dicha base. Entonces

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=a\cdot l+b\cdot m+c\cdot n\in\mathbb{R}}$$

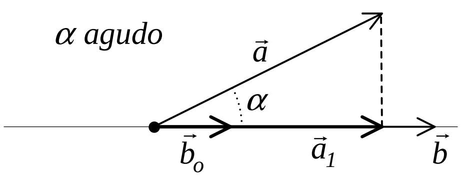
De ahí que:

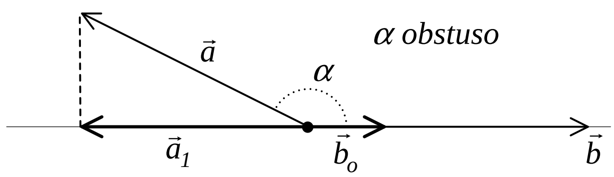
$$\boxed{\|\vec{u}\|=+\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}=+\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

y

$$\boxed{\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{a\cdot l+b\cdot m+c\cdot n}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\begin{cases}>0, & si\ \left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)\ es\ agudo\\ =0, & si\ \vec{u}\perp\vec{v}\\ <0, & si\ \left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)\ es\ obstuso\end{cases}}$$

PROYECCIÓN ORTOGONAL DE UN VECTOR SOBRE OTRO





$$\boxed{\|\vec{a}_1\|=\|proy_{\vec{b}}\left(\vec{a}\right)\|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{\|\vec{b}\|}}$$

$$\boxed{\vec{a}_1=proy_{\vec{b}}\left(\vec{a}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\cdot\vec{b}_o=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\cdot\vec{b}}$$

"<u>La norma del vector proyección ortogonal de un vector sobre otro es igual al valor absoluto de su producto escalar partido por la norma del vector sobre el que se proyecta</u>"

EJEMPLO

Considera los vectores $\vec{a}=(m,1,-1)$ y $\vec{b}=(3,0,4)$

- **a) Calcula m para que sean ortogonales.**
- **b) Para m = 1, calcula la norma del vector proyección ortogonal de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$.**
- **c) Para m = 1, calcula las componentes del vector proyectado**

a) $\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0\iff 3m-4=0\iff m=\frac{4}{3}$.

b) Ahora $\vec{a}=(1,1,-1)$ y $\vec{b}=(3,0,4)$, luego $\|\vec{a}_1\|=\|proy_{\vec{b}}\left(\vec{a}\right)\|=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{\|\vec{b}\|}=\frac{|-1|}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}}=\frac{1}{5}$.

c) $\vec{a}_1=proy_{\vec{b}}\left(\vec{a}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|}\cdot\vec{b}_o=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\cdot\vec{b}=\frac{-1}{25}\cdot(3,0,4)$, y el vector proyectado tiene sentido contrario al vector sobre el que se proyecta.

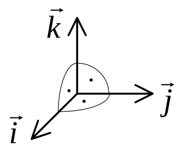
PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES LIBRES

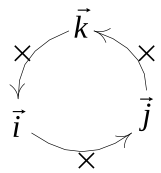
El producto vectorial de dos vectores libres es otro vector, representado por $\vec{u}\times\vec{v}\in E_3$, definido como sigue:

$$(\vec{u},\vec{v})\mapsto\vec{u}\times\vec{v}=\begin{cases}\vec{0}, & \textit{si alguno es nulo}\\ \left.\begin{array}{l}\bullet\ \|\vec{u}\times\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot sen\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)\\ \bullet\ \vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{u}\quad y\quad \vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{v}\\ \bullet\ \textit{sentido sacacorchos de } \vec{u} \textit{ a } \vec{v}\end{array}\right\}, & \textit{en otro caso.}\end{cases}$$

PRODUCTO VECTORIAL EN BASES ORTONORMALES

Sea $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ una BOTN tal que $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\quad y\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$.





y sean $\vec{u}=a\cdot\vec{i}+b\cdot\vec{j}+c\cdot\vec{k}$ y $\vec{v}=l\cdot\vec{i}+m\cdot\vec{j}+n\cdot\vec{k}$ dos vectores de componentes $\vec{u}=(a,b,c)$ y $\vec{v}=(l,m,n)$ respecto a dicha base. Entonces

$$\boxed{\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a&b&c\\l&m&n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b&c\\m&n\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}a&c\\l&n\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}a&b\\l&m\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=\left(\begin{vmatrix}b&c\\m&n\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a&c\\l&n\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a&b\\l&m\end{vmatrix}\right)}$$

PROPIEDADES:

$\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$ (Distributivo por la izquierda)

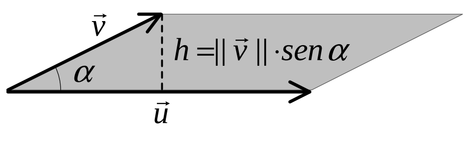
$(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w}=\vec{u}\times\vec{w}+\vec{v}\times\vec{w}$ (Distributivo por la derecha)

$(\lambda\cdot\vec{u})\times\vec{v}=\vec{u}\times(\lambda\cdot\vec{v})=\lambda\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$ (Asociatividad mixta)

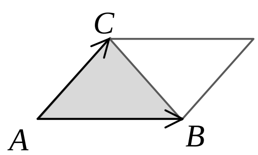
$\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$ (Anticonmutativo)

$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}\iff\vec{u}\ y\ \vec{v}\ \textit{son l. dependientes (colineales / paralelos)}$

Interpretación geométrica de la norma del producto vectorial



$$\boxed{\textit{Área paralelogramo}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot sen\,\alpha=\|\vec{u}\times\vec{v}\|}$$



$$\boxed{\textit{Área triángulo}=\frac{1}{2}\cdot\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\|}$$

PRODUCTO MIXTO DE TRES VECTORES LIBRES

El producto mixto de tres vectores libres $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in E_3$ es un escalar, representado por $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\in\mathbb{R}$, definido así:

$$\boxed{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] \;=\; \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})}$$

Es decir: “el producto escalar del primero por el producto vectorial de los otros dos”.

Si los tres vectores están expresados respecto a la BOTN $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $\vec{u}=a\cdot\vec{i}+b\cdot\vec{j}+c\cdot\vec{k}$, $\vec{v}=l\cdot\vec{i}+m\cdot\vec{j}+n\cdot\vec{k}$ y $\vec{w}=p\cdot\vec{i}+q\cdot\vec{j}+r\cdot\vec{k}$; es decir, si sus componentes respecto a dicha base son $\vec{u}=(a,b,c)$, $\vec{v}=(l,m,n)$ y $\vec{w}=(p,q,r)$, entonces:

$$\boxed{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} a & b & c \\ l & m & n \\ p & q & r \end{vmatrix}=Det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})}$$

Las propiedades de los determinantes proporcionan las siguientes propiedades del producto mixto:

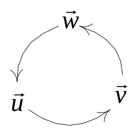
- $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0 \quad\Leftrightarrow\quad \{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}\ es\ \ l.dependiente \quad\Leftrightarrow\quad rg\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}<3$

  (<u>En particular</u>, si algún vector es nulo, o si hay dos proporcionales (colineales), o si alguno es combinación lineal de los otros dos).

- $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ es trilineal y alternado.

  (Es decir: es lineal respecto a cada vector y si se permutan dos cambia de signo).

- $\begin{cases} [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=[\vec{v},\vec{w},\vec{u}]=[\vec{w},\vec{u},\vec{v}]=\ \ \Delta \\ [\vec{u},\vec{w},\vec{v}]=[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]=[\vec{w},\vec{v},\vec{u}]=-\Delta \end{cases}$ *(Permutabilidad cíclica)*

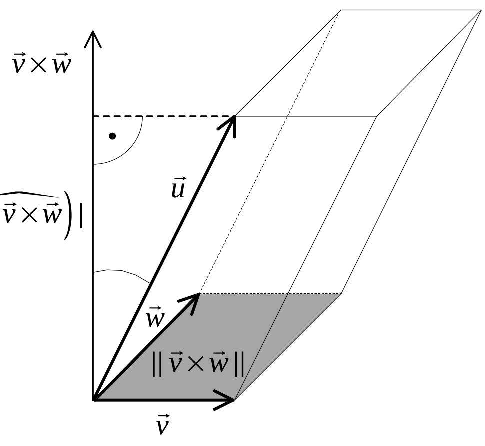


Interpretación geométrica del producto mixto: VOLUMEN DE UN PARALELEPÍPEDO

Si $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in E_3$ son tres vectores no coplanarios y elegimos representantes respectivos con origen común, podemos considerar el paralelepípedo construido sobre ellos. Entonces

$$\boxed{Vol=A_B\cdot h=\left|[\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}]\right|=\left|Det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\right|}$$

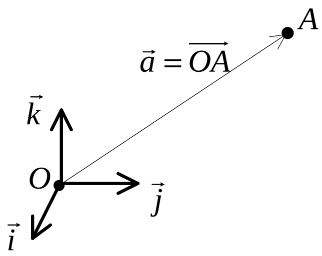
$$h=\|\vec{u}\|\cdot|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}})|$$

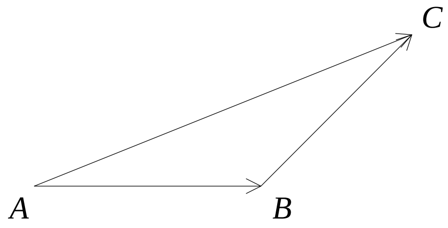


ESPACIO AFÍN A_3 Y ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO $[A_3,\cdot]$

Fijado un punto O, a cada punto A $\in$ **A_3** se le asocia un vector único $\vec{a}=\overrightarrow{OA}\in V_3$: su "vector de posición" respecto al origen fijado. Si $\mathcal{B}=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ es una base de V_3, a $\mathcal{R}=\left[O;\ \left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)\right]$ se le llama "sistema de referencia" del espacio afín. Si trabajamos en el espacio afín euclídeo $[\mathcal{A}_3,\cdot]$ tomaremos una base ortonormal. Entonces $\mathcal{R}=\left[O;\ \left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)\right]$ es un "sistema de referencia ortonormal".

$$\begin{cases} \bullet\ \ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC} \\ \bullet\ \ \overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB} \\ \bullet\ \ \overrightarrow{AA}=\vec{0} \end{cases}$$





Si $\overrightarrow{OA}=a_1\cdot\vec{i}+a_2\cdot\vec{j}+a_3\cdot\vec{k}$, escribimos $\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3)$. Éstas son las componentes del vector de posición $\overrightarrow{OA}$ respecto a la base $\mathcal{B}=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. También se escribe $A(a_1,a_2,a_3)$, y ahora se llaman coordenadas del punto A respecto al sistema de referencia $\mathcal{R}=\left[O;\ \left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)\right]$.

• Componentes de un vector determinado por su origen A y su extremo B

Si $A(a_1,a_2,a_3)$ y $B(b_1,b_2,b_3)$ son dos puntos del espacio afín dados por sus coordenadas en la referencia $\mathcal{R}$, Entonces

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}\quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(b_1,b_2,b_3)-(a_1,a_2,a_3)=(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)$$

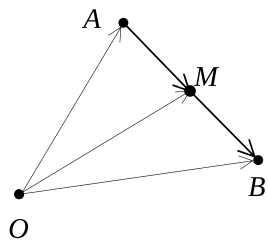
• Punto medio de un segmento [A, B]

Sean A y B dos puntos y M el punto medio del segmento [A, B]. Entonces:

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)}$$

$$\overrightarrow{OM}=(m_1,m_2,m_3)=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},\frac{a_3+b_3}{2}\right)$$



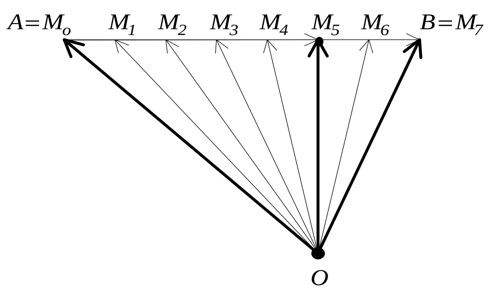
• Puntos que dividen al segmento [A, B] en k (= 7) partes iguales [Ejercicio 20]

Sean A = M_0 y B = M_7 dos puntos distintos y M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 y M_6 los puntos que dividen al segmento [A, B] en 7 partes iguales. Entonces:

$$\overrightarrow{OM_5}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM_5}=\overrightarrow{OA}+\frac{5}{7}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+\frac{5}{7}\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)$$

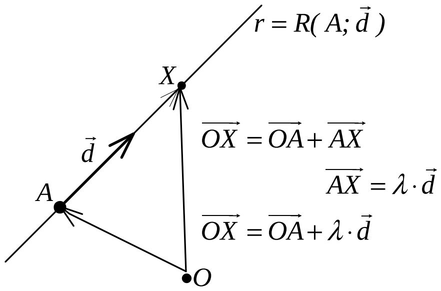
$$\boxed{\overrightarrow{OM_5}=\frac{1}{7}\cdot\left(2\cdot\overrightarrow{OA}+5\cdot\overrightarrow{OB}\right)}$$

$$\overrightarrow{OM_5}=(m_{51},m_{52},m_{53})=\left(\frac{2a_1+5b_1}{7},\frac{2a_2+5b_2}{7},\frac{2a_3+5b_3}{7}\right)$$



LA RECTA EN EL ESPACIO AFÍN

♦ La forma básica de determinar una recta en el espacio afín consiste en dar un punto por donde pasa y un vector de dirección: $r = R(A; \vec{d})$, con $\vec{d} \neq \vec{0}$ (alguna de sus componentes es no nula). Ésta es una "determinación lineal" de la recta.



Tenemos así las distintas ecuaciones de la recta r:

• **Ecuación vectorial**

$$\boxed{r \equiv \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{d}}$$

$$\boxed{r \equiv (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda \cdot (d_1, d_2, d_3)} \qquad r \equiv (x, y, z) = (1, -2, 0) + \lambda \cdot (7, 3, -5)$$

• **Ecuaciones paramétricas**

$$\boxed{r \equiv \begin{cases} x = a_1 + \lambda d_1 \\ y = a_2 + \lambda d_2 \\ z = a_3 + \lambda d_3 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R})} \qquad r \equiv \begin{cases} x = \ \ 1 + 7\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = \ \ 0 - 5\lambda \end{cases}$$

• **Ecuaciones continuas**

$$\boxed{r \equiv \frac{x - a_1}{d_1} = \frac{y - a_2}{d_2} = \frac{z - a_3}{d_3} \quad (= \lambda)} \qquad r \equiv \frac{x-1}{7} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-5}$$

OBSERVACIÓN. Conviene tener en cuenta que lo que ellas expresan es la proporcionalidad entre los vectores $\overrightarrow{AX}$ y $\vec{d}$: obtendremos los antecedentes ("numeradores") y, por tanto las coordenadas (x, y, z) de cada punto de la recta, multiplicando los respectivos consecuentes ("denominadores") por un real cualquiera. Para cada real tomado, que no es otra cosa que la razón de una proporcionalidad, se tendrá un punto de la recta. Esta observación viene a cuento de que, si bien los tres consecuentes (los denominadores) no pueden ser nulos, nada se opone a que alguno o incluso dos de ellos lo sea. Si interpretamos esas expresiones como cocientes, nos encontraríamos con el problema de que aparecerían divisiones por cero y, por tanto, sin sentido. En cambio, tiene perfecto sentido como proporcionalidad. Si alguno de los consecuentes es nulo, significa que el antecedente correspondiente es cero.

EJEMPLOS

• $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+5}{0} = \dfrac{z-1}{4}$ *equivale a* $\begin{cases} y + 5 = 0 \\ \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{z-1}{4} \end{cases}$

• $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+5}{0} = \dfrac{z-1}{0}$ *equivale a* $\begin{cases} [x = \lambda \text{ arbitrario}] \\ y + 5 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$

- **Ecuaciones implícitas (intersección de dos planos)**

$$\boxed{r\equiv\begin{cases}a\ x+b\ y+c\ z+d=0\\ a'x+b'y+c'z+d'=0\end{cases}}\qquad\qquad r\equiv\begin{cases}3x-7y\qquad -17=0\\ 5x\qquad +7z-5=0\end{cases}$$

A menudo es necesario, y siempre útil, obtener una determinación lineal de la recta dada de esta forma.

Las coordenadas de un punto $A\in r$ se pueden obtener resolviendo el sistema de las dos ecuaciones, dando un valor arbitrario a una incógnita "no principal"; después se resuelve el sistema para calcular las otras dos.

Por vector director se puede tomar el vector

$$\vec{d}_r=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ a&b&c\\ a'&b'&c'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b&c\\ b'&c'\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}a&c\\ a'&c'\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}a&b\\ a'&b'\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=\left(\begin{vmatrix}b&c\\ b'&c'\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a&c\\ a'&c'\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a&b\\ a'&b'\end{vmatrix}\right)$$

donde $\vec{n}_1=(a,b,c)$ y $\vec{n}_2=(a',b',c')$. (El significado de esto se explica más adelante).

Otra forma frecuente es la de resolver el sistema (que es compatible indeterminado con soluciones dependientes de un parámetro). La resolución es cómoda por operaciones elementales y por la regla de CRAMER. **[Ejercicio 5]**

EJERCICIO

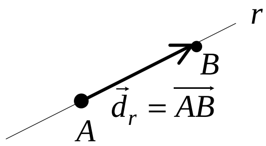
Obtener una determinación lineal de la recta $r\equiv\begin{cases}x\ +\ y\ +\ z\ =\ 1\\ x\ -\ 2y\ +\ 3z\ =\ 0\end{cases}$

Después, escribir las ecuaciones vectorial, paramétricas y continuas.

♦ **Recta determinada por dos puntos distintos**

Inmediatamente, se obtiene una determinación lineal:

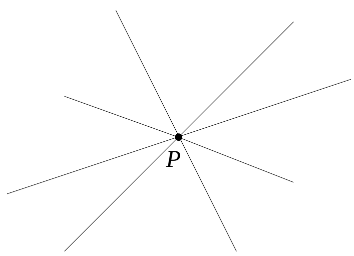
$$\boxed{r=R(A;B)=R(A;\vec{d}=\overrightarrow{AB})}$$



- **Radiación de rectas (familia de rectas incidentes con un punto)**

Si $P(x_o,y_o,z_o)$ es un punto del espacio afín, al conjunto de todas las rectas que pasan por el punto se le llama "radiación de rectas" de vértice P. Tomando como vector director un vector no nulo $\vec{d}=l\cdot\vec{i}+m\cdot\vec{j}+n\cdot\vec{k}$ cuyas componentes respecto a la base $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ son $\vec{d}=(l,m,n)\neq(0,0,0)$, con $l,m,n\in\mathbb{R}$ arbitrarios, tenemos que una ecuación de la radiación es

$$\boxed{r_P\equiv\frac{x-x_o}{l}=\frac{y-y_o}{m}=\frac{z-z_o}{n}\quad(=\lambda)}$$



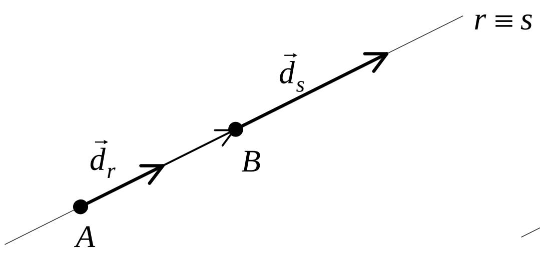
POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS EN EL ESPACIO

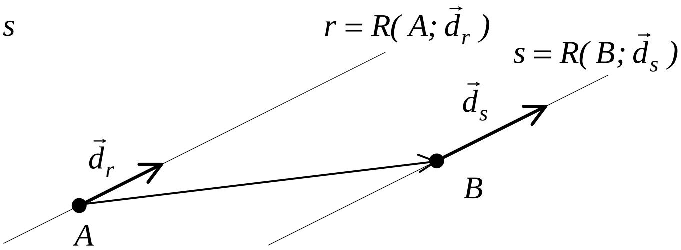
Sean r y s dos rectas dadas por sendas determinaciones lineales: $r = R(A; \vec{d}_r)$ y $s = R(B; \vec{d}_s)$.

- Si los <u>vectores directores son colineales</u> (proporcionales, luego l. dependientes), entonces las rectas r y s tienen la <u>misma dirección</u>.

  - Si, además, el vector $\overrightarrow{AB}$ es colineal con ellos, entonces las rectas son <u>COINCIDENTES</u>.

  - Pero si $\overrightarrow{AB}$ no es colineal con ellos, las rectas son <u>PARALELAS Y DISTINTAS</u>.





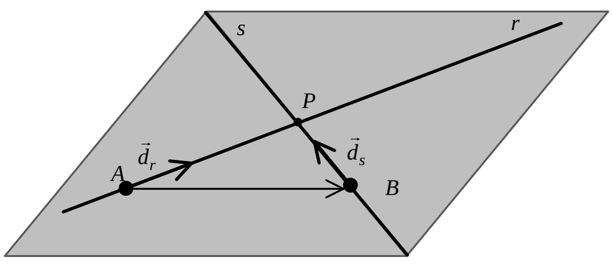
$$\boxed{rg(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad r \ y \ s \ \text{tienen la misma dirección}}$$

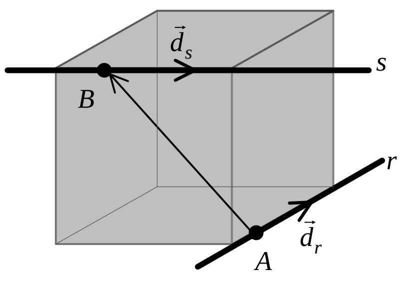
$rg(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{AB}) = 1$ r y s son COINCIDENTES	$rg(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{AB}) = 2$ r y s son PARALELAS Y DISTINTAS

- Si los <u>vectores directores no son colineales</u> (no proporcionales, luego l. independientes), entonces las rectas r y s tienen <u>distinta dirección</u>.

  - Si, además, el vector $\overrightarrow{AB}$ es coplanario con ellos, entonces las rectas son <u>SECANTES</u> en un punto P (cuya determinación se suele pedir).

  - Pero si $\overrightarrow{AB}$ no es coplanario con ellos, las rectas <u>SE CRUZAN EN EL ESPACIO</u> (cuya perpendicular común y distancia mínima se suelen pedir).





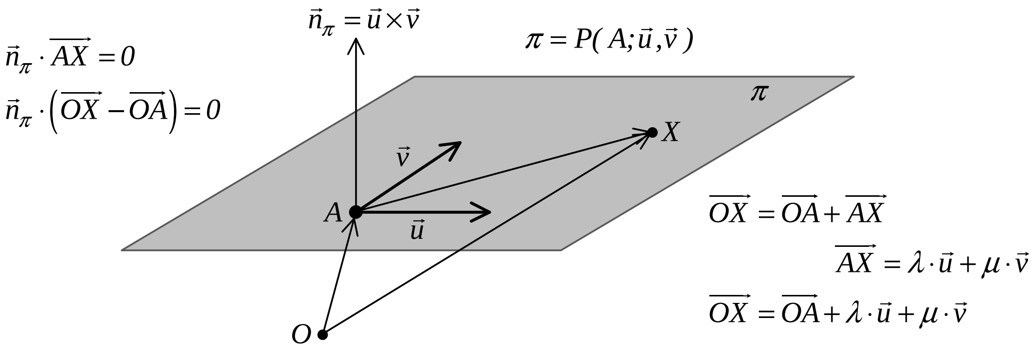
$$\boxed{rg(\vec{d}_r, \vec{d}_s) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad r \ y \ s \ \text{tienen distinta dirección}}$$

$rg(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{AB}) = 2$ r y s SECANTES (en un punto)	$rg(\vec{d}_r, \vec{d}_s, \overrightarrow{AB}) = 3$ r y s SE CRUZAN (en el espacio)

[Ejercicios 7, 8, 9, 14]

EL PLANO EN EL ESPACIO AFÍN

♦ La forma básica de determinar plano en el espacio afín consiste en dar un punto por donde pasa y dos vectores de dirección: $\pi = \pi(A; \vec{u},\vec{v})$, con $\{\vec{u},\vec{v}\}$ linealmente independiente (no colineales). Ésta es una "determinación lineal" del plano.



Tenemos así las distintas ecuaciones del plano π:

• **Ecuación vectorial**

$$\boxed{\pi \equiv \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}}$$

$$\boxed{\pi \equiv (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3) + \mu \cdot (v_1, v_2, v_3)}$$

$$\pi \equiv (x, y, z) = (1,-2,0) + \lambda \cdot (7,3,-5) + \mu \cdot (1,1,2)$$

• **Ecuaciones paramétricas**

$$\boxed{\pi \equiv \begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})} \qquad \pi \equiv \begin{cases} x = 1 + 7\lambda + \mu \\ y = -2 + 3\lambda + \mu \\ z = -5\lambda + 2\mu \end{cases}$$

• **Ecuación general (implícita)**

Como el vector $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, ha de ser

$$Det(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}, \vec{u}, \vec{v}) = 0 \text{ ;}$$

Es decir:

$$\boxed{\pi \equiv \begin{vmatrix} x - a_1 & u_1 & v_1 \\ y - a_2 & u_2 & v_2 \\ z - a_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0} \qquad \pi \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & 7 & 1 \\ y + 2 & 3 & 1 \\ z & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante por la primera columna se obtiene:

$$\boxed{\pi \equiv A(x - a_1) + B(y - a_2) + C(z - a_3) = 0} \qquad \pi \equiv 11(x - 1) - 19(y + 2) + 4(z) = 0$$

Esto significa, en el espacio afín euclídeo, que el vector característico del plano, $\vec{n}_\pi = \vec{u} \times \vec{v} = (A,B,C)$ es ortogonal a $\overrightarrow{AX} = (x - a_1 , y - a_2 , y - a_3)$ ($\vec{n}_\pi = (A,B,C)$ es un "vector normal" al plano), luego

$$\boxed{\vec{n}_\pi \cdot \overrightarrow{AX} = 0} \qquad \boxed{\vec{n}_\pi \cdot \left(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OA}\right) = 0}$$

Operando, se tiene la ecuación general del plano:

$$\boxed{\pi \equiv A\,x + B\,y + C\,z + D = 0} \qquad \pi \equiv 11\,x - 19\,y + 4\,z - 49 = 0$$

EJERCICIO

a) Obtener las ecuaciones de los ejes coordenados y de los planos coordenados.

b) Estudiar cómo son las ecuaciones de planos paralelos a los ejes y de los planos paralelos a los planos coordenados.

c) Estudiar cómo son las ecuaciones de las rectas paralelas a los ejes y de las rectas paralelas a los planos coordenados.

♦ OTRAS DETERMINACIONES DE UN PLANO

- **Plano determinado por tres puntos distintos**

Inmediatamente, se obtiene una determinación lineal:

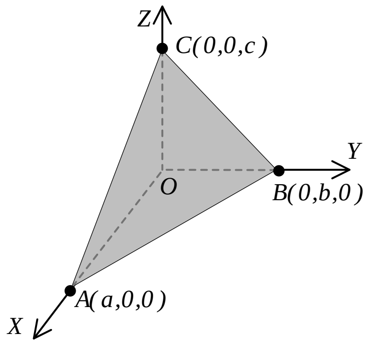
$$\pi = \pi(A, B, C) = R(A; \vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AC})$$

EJERCICIO

Obtener una determinación lineal del plano que pasa por los puntos A(−1, 2, 3), B(1, −2, 3) y C(1, 2, −3).

Después, escribir las ecuaciones vectorial, paramétricas y general.

- **Plano que determina sobre los ejes coordenados tres segmentos no nulos: a, b y c**



ECUACIÓN CANÓNICA DEL PLANO

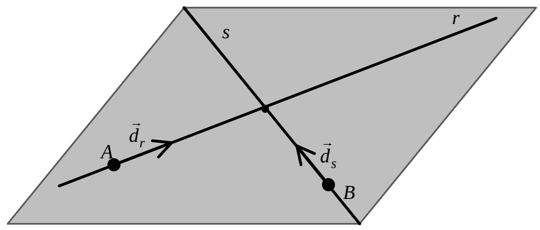
$$\boxed{\pi \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

[Ejercicios 27, 48]

- **Plano determinado por dos rectas secantes**

$r = R(A; \vec{d}_r)$ y $s = R(B; \vec{d}_s)$

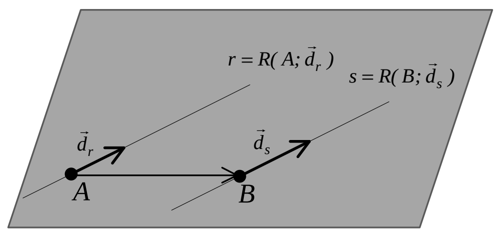
$$\pi = \pi(A; \vec{d}_r, \vec{d}_s)$$



- **Plano determinado por dos rectas paralelas distintas**

$r = R(A; \vec{d}_r)$ y $s = R(B; \vec{d}_s)$

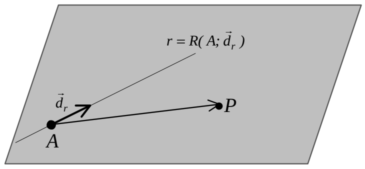
$$\pi = \pi(A; \vec{d}_r, \overrightarrow{AB})$$



- **Plano determinado una recta y un punto exterior**

$$r = R(A; \vec{d}_r)\ P \notin r = R(A; \vec{d}_r)$$

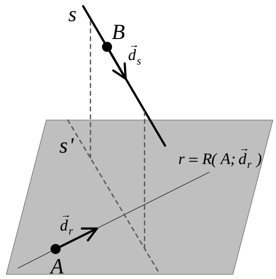
$$\pi = \pi(A; \vec{d}_r, \overrightarrow{AP})$$



- **Plano que contiene a una recta r y es paralelo a otra s que se cruza con la anterior**

$$r = R(A; \vec{d}_r) \text{ y } s = R(B; \vec{d}_s)$$

$$\pi = \pi(A; \vec{d}_r, \vec{d}_s)$$

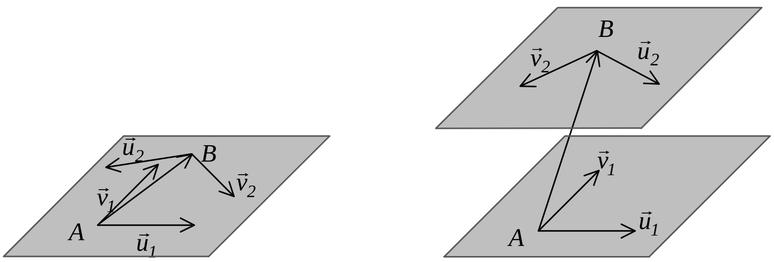


[Ejercicios 5, 7]

POSICIÓN RELATIVA DE DOS PLANOS EN EL ESPACIO

Sean π_1 y π_2 dos planos dados por sendas determinaciones lineales: $\pi_1 = \pi(A; \vec{u}_1, \vec{v}_1)$ y $\pi_2 = \pi(A; \vec{u}_2, \vec{v}_2)$.

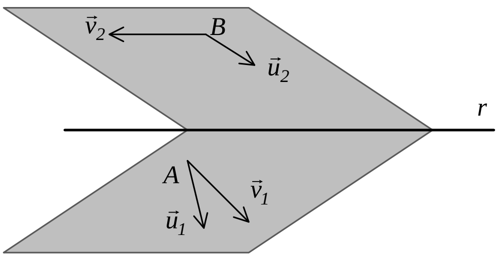
- Si los cuatro vectores directores son coplanarios (l. dependientes), entonces los dos planos tienen la misma dirección.
    - Si, además, el vector $\overrightarrow{AB}$ es coplanario con ellos, entonces los planos son COINCIDENTES.
    - Pero si $\overrightarrow{AB}$ no es coplanario con ellos, los planos son PARALELOS Y DISTINTOS.



$$\boxed{rg(\vec{u}_1, \vec{v}_1; \vec{u}_2, \vec{v}_2) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ tienen la misma dirección}}$$

$rg(\vec{u}_1, \vec{v}_1; \vec{u}_2, \vec{v}_2; \overrightarrow{AB}) = 2$ π_1 y π_2 son COINCIDENTES	$rg(\vec{u}_1, \vec{v}_1; \vec{u}_2, \vec{v}_2; \overrightarrow{AB}) = 3$ π_1 y π_2 son PARALELOS Y DISTINTOS

- Si tres de los vectores directores no son coplanarios (l. independientes), entonces los dos planos tienen distinta dirección y son SECANTES (en una recta).



$$\boxed{\begin{array}{l} rg(\vec{u}_1, \vec{v}_1; \vec{u}_2, \vec{v}_2) = 3 \\ \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ son SECANTES} \end{array}}$$

Si los dos planos vienen dados por su ecuación general, que es lo más frecuente, la posición relativa se estudia como sigue:

Sean π_1 y π_2 dos planos dados por

$$\boxed{\begin{array}{l}\pi_1 \equiv A\ x + B\ y + C\ z = D \\ \pi_2 \equiv A'x + B'y + C'z = D'\end{array}}$$

estudiamos la compatibilidad del sistema formado por las dos ecuaciones:

- Si

$$rg\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = rg\left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{array}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}}$$

las dos ecuaciones son proporcionales y representan un único plano: los dos planos son COINCIDENTES. (El sistema es compatible indeterminado con dos incógnitas libres: la solución del sistema proporciona las ecuaciones paramétricas del plano).

- Si

$$rg\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 1 \neq 2 = rg\left(\begin{array}{ccc|c} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{array}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}}$$

el sistema es incompatible, y los dos planos son PARALELOS Y DISTINTOS.

- Si

$$rg\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{No\ se\ cumple\left(\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}\right)}$$

el sistema es compatible indeterminado con sólo una incógnita libre, y los dos planos son SECANTES en una recta. (La solución del sistema proporciona las ecuaciones paramétricas de dicha recta).

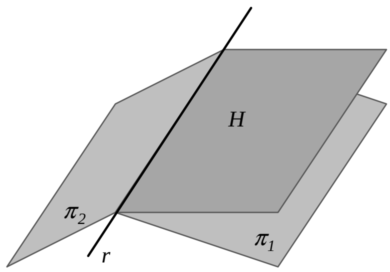
[Este tratamiento tiene una interpretación euclídea mediante los vectores normales de los planos]

[Ejercicios 12, 18, 31, 32, 35,41]

- **Haz de planos de arista una recta dada (de base dos planos dados)**

Sea r una recta dada como intersección de dos planos secantes:

$$r = \pi_1 \cap \pi_2 \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv A\ x + B\ y + C\ z + D = 0 \\ \pi_2 \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$



La ecuación

$$\boxed{H \equiv \alpha \cdot \left(A\ x + B\ y + C\ z + D\right) + \beta \cdot \left(A'x + B'y + C'z + D'\right) = 0 \qquad \left(\alpha, \beta \in \mathbb{R}\right)}$$

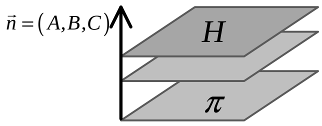
representa a la familia de todos los planos que contienen a la recta r. Para seleccionar un plano concreto del haz se ha de tener alguna condición adicional; por ejemplo, que pase además por un cierto punto exterior a la recta, o que se paralelo (o perpendicular) a otro plano dado. Esta condición permitirá determinar los parámetros α y β.

[Ejercicio 16]

• **Haz de planos paralelos a un plano dado**

Dado un plano $\pi \equiv A\ x + B\ y + C\ z = D$, su dirección está contenida en los coeficientes A, B y C, (que son las componentes del vector característico), luego todo plano que tenga los mismos A, B y C es paralelo al dado. Así, la ecuación del haz de planos paralelos es:

$$H \equiv A\ x + B\ y + C\ z = k, \quad (k \in \mathbb{R})$$



El parámetro k se determina con condiciones adicionales como antes.

[Ejercicios 27, 35, 40]

POSICIÓN RELATIVA DE UNA RECTA Y UN PLANO EN EL ESPACIO

♦ Sean la recta $r \equiv \begin{cases} x = a_1 + \lambda d_1 \\ y = a_2 + \lambda d_2 \\ z = a_3 + \lambda d_3 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$.

Tratamos de obtener los puntos comunes a la recta y el plano. Para ello se sustituyen las coordenadas paramétricas de un punto de la recta en la ecuación del plano:

$$r \cap \pi \quad \Rightarrow \quad A(a_1 + \lambda d_1) + B(a_2 + \lambda d_2) + C(a_3 + \lambda d_3) + D = 0$$

$$(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D) + \lambda(Ad_1 + Bd_2 + Cd_3) = 0$$

$$p + \lambda \cdot q = 0$$

• Si $q = Ad_1 + Bd_2 + Cd_3 \neq 0$, entonces $\lambda_o = -\dfrac{p}{q} = \dfrac{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D}{Ad_1 + Bd_2 + Cd_3}$, y sustituyendo el valor de λ obtenido obtenemos la coordenadas del único punto común a la recta y el plano. La <u>RECTA CORTA AL PLANO</u> en el punto $P(x_o, y_o, z_o):\quad P(a_1 + \lambda_o d_1, a_2 + \lambda_o d_2, a_3 + \lambda_o d_3)$.

EJERCICIO

$$r \equiv R\left[A(2,-2,1); \vec{d} = (2,1,-5)\right]; \qquad \pi \equiv 2x - 3y + z - 1 = 0$$

• Si $\begin{cases} q = Ad_1 + Bd_2 + Cd_3 = 0 \\ p = Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D = 0 \end{cases}$, entonces $0 + \lambda \cdot 0 = 0$ se verifica para cualquier valor de λ. Por tanto, todo punto de la recta pertenece al plano: <u>RECTA CONTENIDA EN EL PLANO</u>.

EJERCICIO

$$r \equiv R\left[A(1,1,2); \vec{d} = (2,1,-1)\right]; \qquad \pi \equiv 2x - 3y + z - 1 = 0$$

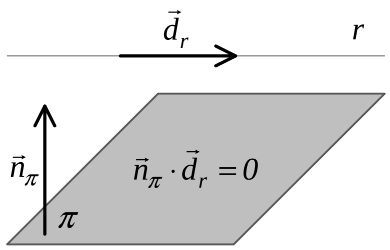
• Si $\begin{cases} q = Ad_1 + Bd_2 + Cd_3 = 0 \\ p = Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D \neq 0 \end{cases}$, entonces $p + \lambda \cdot 0 = 0$ no se verifica para todo ningún valor de λ. Por tanto, ningún punto de la recta pertenece al plano: <u>RECTA PARALELA AL PLANO</u>.

EJERCICIO

$$r \equiv R\left[A(2,1,2); \vec{d} = (2,1,-1)\right]; \qquad \pi \equiv 2x - 3y + z - 1 = 0$$

Que $p = Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D = 0$ significa que el punto $A(a_1, a_2, a_3)$ de la recta también pertenece al plano.

En el espacio afín euclídeo, que $q = Ad_1 + Bd_2 + Cd_3 = 0$ significa que el vector normal del plano $\vec{n}_\pi = (A, B, C)$ es perpendicular al vector director de la recta $\vec{d}_r = (d_1, d_2, d_3)$.



♦ Si la recta viene dada como intersección de dos planos y el plano por su ecuación general,

$$r = \pi_1 \cap \pi_2 \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv A\ x + B\ y + C\ z + D = 0 \\ \pi_2 \equiv A'\,x + B'\,y + C'\,z + D' = 0 \end{cases} \qquad \pi \equiv M\ x + N\ y + P\ z + Q = 0$$

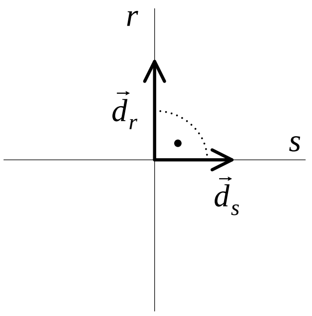
estudiamos el sistema formado por las tres ecuaciones. Entonces:

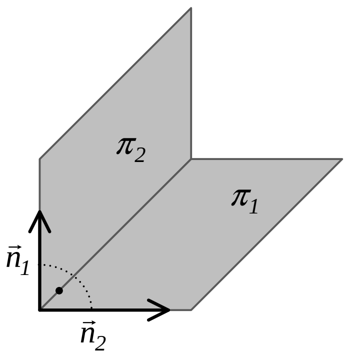
- ♦ <u>Compatible determinado</u> significa que la recta corta al plano en un punto.
- ♦ <u>Compatible indeterminado</u> significa que la recta está contenida en el plano.
- ♦ <u>Incompatible</u> significa que la recta es paralela y exterior al plano.

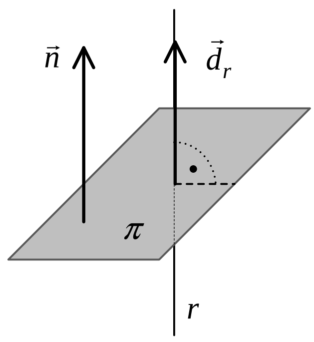
[Ejercicios 8, 10, 15, 16]

PERPENDICULARIDAD EN EL ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO

La perpendicularidad recta−recta, plano−plano y recta−plano se estudia mediante los vectores directores de las rectas y los vectores característicos de los planos.







$r \perp s \Leftrightarrow \vec{d}_r \cdot \vec{d}_s = 0$ $\qquad$ $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ $\qquad$ $r \perp \pi \Leftrightarrow \vec{d}_r \parallel \vec{n}$

[Ejercicios 19, 22, 25, 34, 35, 40, 41, 51, 52]

PROBLEMAS MÉTRICOS (EN EL ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO)

DISTANCIAS

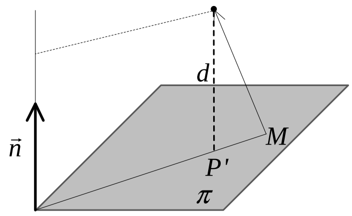
• Distancia entre dos puntos

$$\boxed{d(A,B)=\|\overrightarrow{AB}\|=+\sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}}=+\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}}$$

• Distancia de un punto P a un plano π

Sean $P(x_o,y_o,z_o)$ un punto, $\pi\equiv A\,x+B\,y+C\,z+D=0$ un plano y P' la proyección ortogonal de P sobre π. Sea $\vec{n}=(A,B,C)$ un vector normal al plano.

Si $M(m_1,m_2,m_3)$ es un punto arbitrario del plano, entonces la distancia del punto al plano es:



$$d=d(P;\pi)=\|\overrightarrow{P'P}\|=\|proy_{\vec{n}}\left(\overrightarrow{MP}\right)\|=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{MP}|}{\|\vec{n}\|}$$

$$\boxed{d(P;\pi)=\frac{|Ax_o+By_o+Cz_o+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

(A veces es útil determinar el punto P', proyección ortogonal del punto P sobre el plano π (lo trataremos más adelante), y luego calcular la distancia de P a P').

[Ejercicio 37, 39]

• Distancia del origen de coordenadas a un plano π

En particular, la distancia del origen *O(0, 0, 0)* a un plano π (llamada "parámetro" del plano) es

$$\boxed{p=d(O;\pi)=\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|D|}{\|\vec{n}\|}}$$

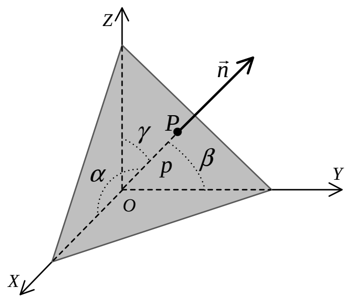
• ECUACIÓN NORMAL DEL PLANO

La ecuación del plano $\pi\equiv A\,x+B\,y+C\,z+D=0$, con $\vec{n}=(A,B,C)$ y $\|\vec{n}\|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, se puede escribir en la forma

$$\pi\equiv\pm\frac{A}{\|\vec{n}\|}x\pm\frac{B}{\|\vec{n}\|}y\pm\frac{C}{\|\vec{n}\|}z-\frac{D}{\|\vec{n}\|}=0$$

$$p=\frac{D}{\|\vec{n}\|}=d(O;\pi)$$

$$\boxed{\pi\equiv(\cos\alpha)\,x+(\cos\beta)\,y+(\cos\gamma)\,z-p=0}$$

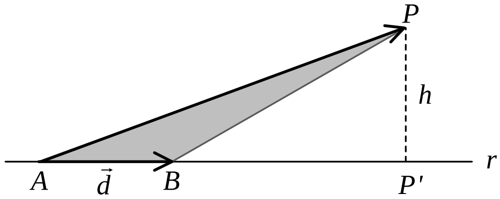


donde α, β y γ son los ángulos que forma el vector normal del plano, $\vec{n}$, con los ejes coordenados. Sus cosenos se llaman "**cosenos directores**" del vector normal. Son las componentes del vector normal unitario $\vec{n}_o=\pm\frac{1}{\|\vec{n}_o\|}\cdot\vec{n}$ que apunta del origen al plano. A $p=\frac{D}{\|\vec{n}\|}$ se le llama "**parámetro**" del plano.

[Ejercicio 48]

• Distancia de un punto P a una recta r

Expresamos el área del triángulo (A,B,P) de dos formas. Igualamos y despejamos la distancia:



$$\left.\begin{array}{l} \acute{A}rea(A,B,P)=\dfrac{1}{2}(base)\cdot(altura)=\dfrac{1}{2}\|\vec{d}\|\cdot h \\ \acute{A}rea(A,B,P)=\dfrac{1}{2}\|\vec{d}\times\overrightarrow{AP}\| \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \boxed{h=d(P,r)=\dfrac{\|\vec{d}\times\overrightarrow{AP}\|}{\|\vec{d}\|}}$$

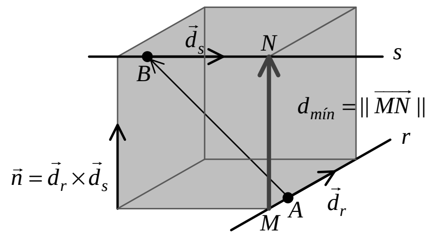
(A veces es útil determinar el punto P', proyección ortogonal del punto P sobre la recta r (lo trataremos más adelante), y luego calcular la distancia de P a P').

[Ejercicio 47]

• Distancia mínima entre dos rectas que se cruzan en el espacio

Sean r y s dos rectas que se cruzan dadas por sendas determinaciones lineales: $r=R(A;\vec{d}_r)$ y $s=R(B;\vec{d}_s)$. Entonces:

$$\boxed{\begin{array}{l} d_{mín}=\|\overrightarrow{MN}\|=\|proy_{\vec{n}}\left(\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \\ d_{mín}=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\left(\vec{d}_r\times\vec{d}_s\right)|}{\|\vec{d}_r\times\vec{d}_s\|} \end{array}}$$



MÉTODO ALTERNATIVO 1: Se puede hallar el plano que contiene a r y es paralelo a s (de la forma que convenga). Después, basta calcular la distancia de un punto arbitrario de la recta s al plano hallado.

MÉTODO ALTERNATIVO 2: También podemos considerar las coordenadas paramétricas de un punto arbitrario M de r y de un punto arbitrario N de s

$$M\left(a_1+\lambda d_1^r, a_2+\lambda d_2^r, a_3+\lambda d_3^r\right) \quad \text{y} \quad N\left(b_1+\mu d_1^s, b_2+\mu d_2^s, b_3+\mu d_3^s\right)$$

Después consideramos el vector $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$. Como $\overrightarrow{MN}$ ha de ser ortogonal a los dos vectores directores, las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{MN}\cdot\vec{d}_r=0 \\ \overrightarrow{MN}\cdot\vec{d}_s=0 \end{array}\right\}$$

permiten calcular los valores de λ y μ que proporcionan los puntos M y N. Después se calcula la distancia entre ellos.

[Ejercicio 46]

En este contexto, podemos plantearnos hallar la ecuación de la

• Recta perpendicular común a r y s

Una vez determinados M y N como se ha explicado, la perpendicular común, t, es la recta que pasa por ambos:

$$\boxed{t=R(M,N)=R(M;\vec{d}_t=\overrightarrow{MN})}$$

Otra forma de obtener la perpendicular común consiste en expresarla como intersección de dos planos: uno que contiene a r y es perpendicular a s, $\pi_1 = \pi\left(A; \vec{d}_r, \vec{d}_r \times \vec{d}_s\right)$, y otro que contiene a s y es perpendicular a r, $\pi_2 = \pi\left(B; \vec{d}_s, \vec{d}_r \times \vec{d}_s\right)$.

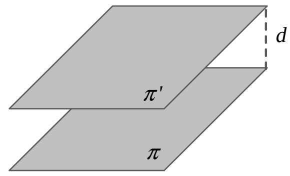
[Ejercicios 49, 50]

- **Distancia entre dos planos paralelos**

Se puede calcular la distancia de un punto un plano al otro.

También, si $\pi \equiv A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$ y $\pi' \equiv A\,x + B\,y + C\,z + D' = 0$ son los planos en cuestión, se tiene que

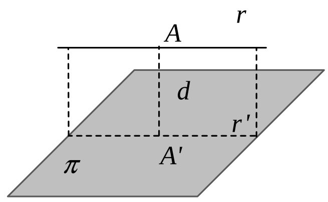
$$\boxed{d = d(\pi;\pi') = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$



(**IMPORTANTE**: los dos planos han de tener el mismo vector normal $\vec{n} = \left(A, B, C\right)$)

- **Distancia de una recta a un plano paralelo**

Se calcula la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano.



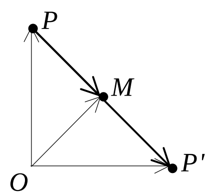
SIMETRÍAS

- **Punto simétrico de un punto P respecto a otro M**

Determinemos el vector de posición del punto simétrico

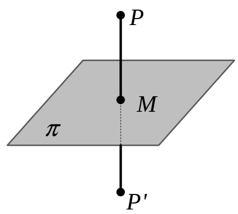
$$\overrightarrow{PP'} = 2 \cdot \overrightarrow{PM} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP} = 2 \cdot \left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{OP'} = 2 \cdot \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}}$$



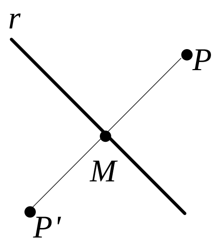
- **Punto simétrico de un punto P respecto a un plano π**

Hallamos la recta que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π. La intersección de r con π proporciona el punto M. Ahora procedemos como antes.



- **Punto simétrico de un punto P respecto a una recta r**

Hallamos el plano π que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta r. La intersección de r con π proporciona el punto M. Ahora procedemos como antes.



[Ejercicios 33, 36, 45, 47, 53]

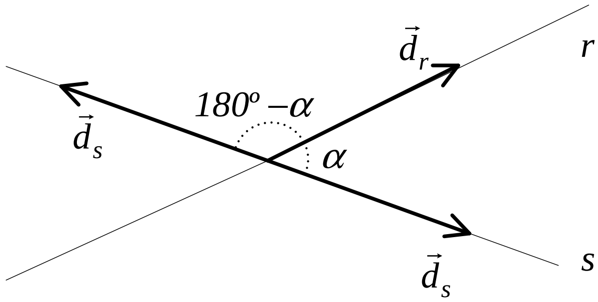
ÁNGULOS

• Ángulo de dos rectas

Sean r y s dos rectas dadas por sendas determinaciones lineales: $r = R(A; \vec{d}_r)$ y $s = R(B; \vec{d}_s)$.

Si $\alpha = \left(\widehat{\vec{d}_r, \vec{d}_s}\right)$, se llama ángulo de las dos rectas al menor de α y $180^o - \alpha$ (suplementarios: tienen igual seno y cosenos opuestos). Entonces:

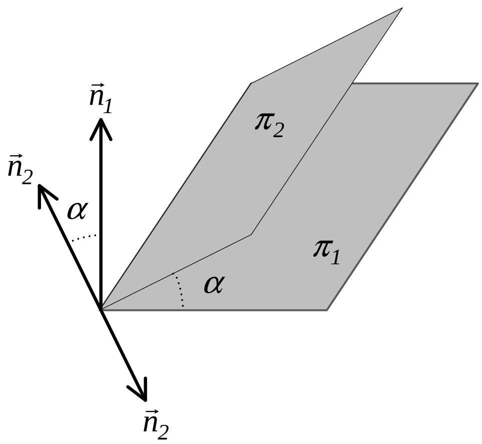
$$\boxed{cos\left(\widehat{r,s}\right) = \left|cos\left(\widehat{\vec{d}_r, \vec{d}_s}\right)\right| = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{\|\vec{d}_r\| \cdot \|\vec{d}_s\|}}$$



• Ángulo de dos planos

Sean π_1 y π_2 dos planos dados por un punto y un vector normal: $\pi_1 = \pi(A; \vec{n}_1)$ y $\pi_2 = \pi(A; \vec{n}_2)$.

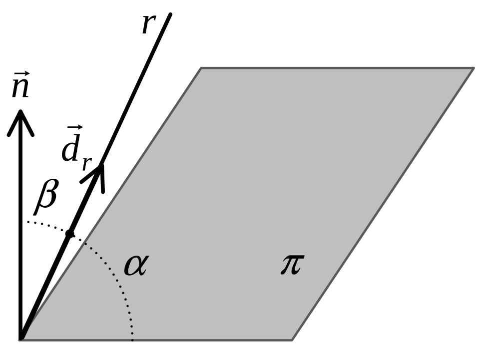
$$\boxed{cos\left(\widehat{\pi_1, \pi_2}\right) = \left|cos\left(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}\right)\right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|}}$$



• Ángulo entre recta y plano

Sean la recta $r = R(A; \vec{d}_r)$ y el plano $\pi \equiv A\,x + B\,y + C\,z + D = 0$, con $\vec{n} = (A, B, C)$.

$$\boxed{sen\left(\widehat{r,\pi}\right) = \left|cos\left(\widehat{\vec{d}, \vec{n}}\right)\right| = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{d}\| \cdot \|\vec{n}\|}}$$

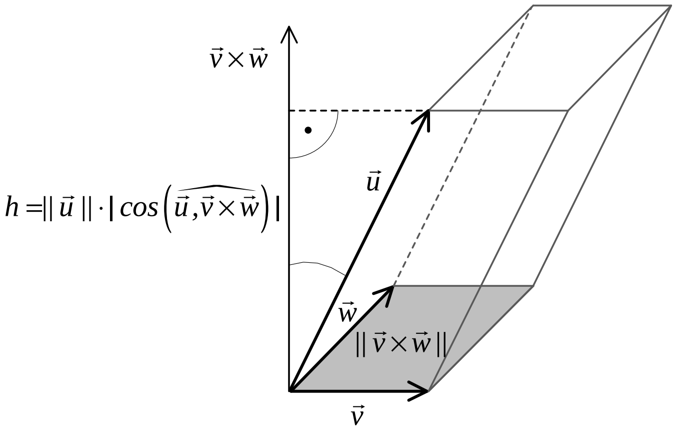


[Ejercicio 32]

VOLÚMENES

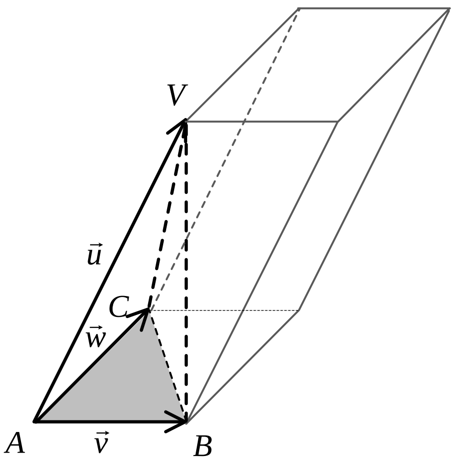
- **Volumen de un paralelepípedo**

$$\boxed{V = A_B \cdot h = \left|\left[\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}\right]\right| = \left|Det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)\right|}$$



- **Volumen de un tetraedro**

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\cdot A_B \cdot h = \frac{1}{6}\cdot\left|\left[\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}\right]\right| = \frac{1}{6}\cdot\left|Det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)\right|}$$



GEOMETRÍA: RESUMEN

Geometría afín

Estudia los elementos del espacio:

- **Puntos**

- **Rectas**
  - **Se expresan mediante**
    - Ec. vectorial
    - Ec. paramétricas
    - Ec. continua
    - Ec. implícitas (intersección de dos planos)
    - [Ec. reducidas]

  - **Posiciones relativas de dos rectas**
    - Coincidentes
    - Paralelas distintas
    - Secantes (perpendicularmente o no) en un punto
    - Se cruzan
- **Planos**
  - **Se expresan mediante**
    - Ec. vectorial
    - Ec. paramétricas
    - Ec. general o implícita
    - Ec. canónica

  - **Posiciones relativas de dos rectas**
    - Coincidentes
    - Paralelos distintos
    - Secantes (perpendicularmente o no) en una recta
- **Recta−plano**

  - **Posiciones relativas de recta−plano**
    - Recta contenida en el plano
    - Recta paralela (no contenida) al plano
    - Secantes (perpendicularmente o no) en un punto

Geometría afín euclídea (métrica)

Al contar con el producto escalar, se pueden abordar nuevos problemas.

- **Distancias**
  - Punto−punto
  - Punto−recta
  - Punto−plano
  - Orígen−plano
  - [Ec. normal]
  - Entre rectas paralelas
  - Entre rectas que se cruzan
  - Entre planos paralelos
  - Entre recta y plano paralelos

- **Ángulos (Perpendicularidad)**

  - Recta−recta (coplanarias o cruzándose)
  - Plano−plano
  - Recta−plano

- **Áreas y Volúmenes**
  - Paralelogramos y triángulos
  - Paralelepípedos y tetraedros

- **Otros problemas métricos**
  - Puntos simétricos (respecto a punto, plano o recta)
  - Perpendicular común de dos rectas que se cruzan
  - Planos mediador de un segmento y bisector de un diedro
  - Proyecciones ortogonales (sobre recta o sobre plano)

GEOMETRÍA: EJERCICIOS

1 Sean los vectores $\vec{v}_1=(0,1,0), \vec{v}_2=(2,1,-1)$ y $\vec{v}_3=(2,3,-1)$.

a) Estudiar si el sistema $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ es linealmente independiente. [Es l. dep.]

b) ¿Para qué valor de m el vector $\vec{x}=(4,m+3,-2)$ puede expresarse como combinación lineal de $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$? [$\forall m\in\mathbb{R}$]

c) Calcula un vector $\vec{w}_0$, unitario y ortogonal a $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. [$\vec{w}_0=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}(1,0,2)$]

---

2 Dados $\vec{u}=(2,1,0)$ y $\vec{v}=(-1,0,1)$, halla un $\vec{w}_0$ unitario, coplanario con $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y ortogonal a $\vec{v}$.

[$\vec{w}_0=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$]

---

3 Sean $\vec{v}_1=(x,2,0), \vec{v}_2=(x,-2,1)$ y $\vec{v}_3=(2,-x,-4x)$ tres vectores de $\mathbb{R}^3$.

a) Determina los valores de x para los que $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ sea linealmente independiente. [$\forall x\in\mathbb{R}$]

b) Halla los valores de x para los que los vectores dados sean ortogonales dos a dos. [x = ± 2]

---

4 Considera los vectores $\vec{u}=(1,1,m), \vec{v}=(0,m,-1)$ y $\vec{w}=(1,2m,0)$.

a) Determina m para que $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ sea linealmente dependiente. [m = 1]

b) Para el m hallado en el apartado anterior, expresa $\vec{w}$ como combinación lineal de $\{\vec{u},\vec{v}\}$.

[$\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$]

---

5 Los puntos $A(-2,3,1), B(2,-1,3)$ y $C(0,1,-2)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo (A, B, C, D).

a) Halla las coordenadas del vértice D. [D(–4, 5, –4)]

b) Escribe una ecuación de la recta que pasa por B y es paralela a la diagonal AC.

[$r\equiv(x,y,z)=(2,-1,3)+\lambda\cdot(2,-2,-3)$]

c) Halla la ecuación del plano que contiene a dicho paralelogramo. [$x+y-1=0$]

---

6 Se sabe que los planos de ecuaciones $x+2y+bz=1$, $2x+y+bz=0$ y $3x+3y-2z=1$ se cortan en una recta r.

a) Calcula el valor de b. [b = –1]

b) Halla una ecuación vectorial y unas ecuaciones paramétricas de r.

[$r\equiv(x,y,z)=(0,1,1)+\lambda\cdot(1,1,3)$]

---

7 Sean las rectas $r\equiv\frac{x-5}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{4}$ y $s\equiv\begin{cases}3x-2y+z=2\\-x+2y-3z=2\end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de ambas rectas. [Se cruzan en el espacio]

b) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s.

[$\pi\equiv-9x+2y+5z+49=0$]

---

8 Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ 3y + z = 3 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 0 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de ambas rectas. [Se cruzan en el espacio]

b) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r.

[$\pi \equiv 2x-3y-z-3=0$]

---

9 Considera el punto $P(1, 0, 0)$ y las rectas

$$r \equiv \frac{x-3}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-2} \quad \text{y} \quad s \equiv (x,y,z)=(1,1,0)+\lambda\cdot(-1,2,0)$$

a) Estudia la posición relativa de ambas rectas. [Se cruzan en el espacio]

b) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto P y es paralelo a ambas.

[$\pi \equiv 2x+y+2z-2=0$]

---

10 Sean $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$, $\pi_1 \equiv x+y+z=0$ y $\pi_2 \equiv y+z=0$.

Halla una ecuación de la recta s contenida en π_1, que es paralela a π_2 y corta a r.

[$s \equiv (x,y,z)=(1,0,-1)+\lambda\cdot(0,1,-1)$]

---

11 Sean la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + y - mz = 2 \\ x - y - z = -m \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x+my-z=1$

a) ¿Existe algún valor de m para el que r es paralela a π? [m = 2]

b) ¿Para qué valor de m la recta r está contenida en el plano π? [m = – 1]

c) ¿Cuál es la posición relativa de la recta y al plano cuando m = 0? [r corta a π en P(1/2,1,–1/2)]

---

12 Considera las rectas $r \equiv \frac{x-2}{3}=\frac{y-k}{4}=\frac{z}{5}$ y $s \equiv \frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{3}$

a) Halla k sabiendo que r y s son secantes en un punto. [k = – 4/7]

b) Determina una ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

[$\pi \equiv (x,y,z)=(-2,1,3)+\lambda\cdot(3,4,5)+\mu\cdot(-1,2,3)$]

---

13 Sean la rectas $r \equiv \begin{cases} x = a + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 4 - t \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}\right)$ y $s \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{3}$

a) Calcula el valor de a sabiendo que r y s se cortan. [a = 2]

b) Halla el punto de corte. [P(3, – 1, 2)]

---

14 Sabiendo que las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - 2y - z = a \\ 2x + z = a \end{cases}$ son secantes, calcula a y el punto de corte. [a = 19/7; P(10/7, – 4/7, – 1/7)]

---

15 Halla la ecuación de la recta s que pasa por el punto P(3, 1, – 1), es paralela al plano $\pi \equiv 3x-y+z=4$ y corta a la recta $r \equiv \begin{cases} x + z = 4 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$

[$s \equiv (x,y,z)=(3,1,-1)+\lambda\cdot(-3,2,11)$]

---

16 Dados la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x - 2y + z = 0$.

a) Escribe la ecuación del haz de planos de arista r.

b) Halla el plano π_1 que contiene a r y corta a π en una recta s paralela al plano $z = 0$.

[$\pi_1 \equiv x - 2y - z + 5 = 0$]

---

17 Halla unas ecuaciones paramétricas de la recta s que corta a la recta $r \equiv x = y = z$, es paralela al plano $\pi \equiv 3x + 2y - z = 4$ y pasa por el punto P(1, 2, – 1). [$s \equiv (1,2,-1) + \lambda \cdot (1,0,3)$]

---

18 Considera la recta $s \equiv \begin{cases} x - z = -1 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$

a) Halla la ecuación de un plano π_1 que es paralelo la recta s y contiene a la recta $r \equiv x - 1 = -y + 2 = z - 3$. [$\pi \equiv x - z + 2 = 0$]

b) Estudia la posición relativa de la recta s y el plano $\pi_2 \equiv x + y = 3$, y deduce la distancia entre s y π_2. [d = 0]

---

19 Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Halla los puntos que dividen al segmento [A, B], con A(1, 2, 1) y B(–1, 2, 3), en tres partes iguales. [M_1(1/3, 4/3, 5/3) y M_2(–1/3, 2/3, 7/3)]

b) Determina la ecuación del plano perpendicular al segmento [A, B] que pasa por su punto medio. (Plano “mediador”) [$\pi \equiv x + y - z + 1 = 0$]

---

20 Considera los puntos A(1, 0, −2) y B(−2, 3, 1).

a) Determina los puntos del segmento que lo dividen en tres partes iguales. [M_1(0, 1, −1) y M_2(–1, 2, 0)]

b) Calcula el área del triángulo de vértices A, B y C, siendo C un punto de la recta de ecuaciones continuas $r \equiv -x = y - 1 = z$. ¿Depende el resultado de la elección concreta del punto C?

[Área = $3\sqrt{2}/2$; Independiente de C]

---

21 Dados los puntos A(2, 1, −1) y B(−2, 3, 1), y la recta $s \equiv \begin{cases} x - y - z = -1 \\ 3x - 2z = -5 \end{cases}$, halla las coordenadas de un punto de la recta r que equidiste de los puntos A y B. [A(−1, −1, 1)]

---

22 Halla un ecuación de la recta r contenida en el plano de ecuación $\pi \equiv x + 2y + 3z - 1 = 0$ y que corta perpendicularmente a la recta $s \equiv \begin{cases} x = 2z + 4 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$ en el punto P(2, 1, −1).

[$r \equiv (x,y,z) = (2,1,-1) + \lambda \cdot (4,-5,2)$] $\left[r \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z = 5 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \right]$

---

23 Determina la recta que no corta al plano $\pi \equiv x - y + z = 7$ y cuyo punto más próximo al origen es A(1, 2, 3). [$r \equiv (x,y,z) = (1,2,3) + \lambda \cdot (-5,-2,3)$] $\left[r \equiv \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y + 3z = 14 \end{cases} \right]$

---

24 Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$

a) Determina la ecuación del plano que contiene a la recta r y no corta al eje OZ. $[\pi \equiv 2x + 5y \quad -3 = 0]$

b) Calcula la <u>proyección ortogonal</u> del punto A(1, 2, 1) sobre la recta r. [A'(1/19, 11/19, 7/19]

---

25 Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 2y + 1 = 0 \\ x - 2z + 3 = 0 \end{cases}$.

a) Halla una ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s. $[\pi \equiv -x - 3y + 2z + 5 = 0]$

b) ¿Existe algún plano que contenga a r y sea perpendicular a s? [No es posible]

---

26 Considera los puntos A(2, 1, 2) y B(0, 4, 1) y la recta $r \equiv x = y - 2 = \dfrac{z-3}{2}$.

a) Determina el punto C de la recta r que <u>equidiste</u> de los puntos A y B. [C(−1, 1, 1)]

b) Calcula el <u>área del triángulo</u> (A,B,C). [($\sqrt{91}/2$ u^2]

---

27 Halla la ecuación del plano que sea paralelo al plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ y que determine con los ejes coordenados triángulo de <u>área</u> 18√3 u^2. $[\pi_1 \equiv x + y + z = 6\,]$

---

28 Halla el <u>punto</u> de la recta $r \equiv \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ y + z = -1 \end{cases}$ que esté <u>más cercano</u> al punto P(1,−1,0).

[P'(2, 0, −1)]

---

29 Lo
s puntos A(1, 1, 0) y B(2, 2, 1) son vértices consecutivos de un <u>rectángulo</u> (A,B,C,D). Además, se sabe que los vértices C y D están contenidos en una recta que pasa por el origen de coordenadas. Halla C y D. [C(5/3, 5/3, 5/3), D(2/3, 2/3, 2/3)]

---

30 Se sabe que los puntos A(1, 0, −1), B(3, 2, 1) y C(−7, 1, 5) son vértices consecutivos de un paralelogramo (A,B,C,D).

a) Calcula las coordenadas del punto D. [D(−9, −1, 3)]

b) Halla el <u>área del paralelogramo</u>. [A = $2\sqrt{302}$ u^2]

---

31 Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \; (t \in \mathbb{R})$ y el plano $\pi \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} \; (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

a) Estudia la <u>posición relativa</u> de la recta r y el plano π. [r contenida en π]

b) Dados dos puntos B(4, 4, 4) y C(0, 0, 0), halla un punto A de la recta r de manera que el triángulo (A,B,C) sea rectángulo en B. [A(6, 6, 0)]

---

32 Considera el plano $\pi \equiv x - 2y \quad + 1 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - y + az = -2 \end{cases}$

a) Halla el valor de a sabiendo que la recta está contenida en el plano. [a = −1]

b) Calcula el <u>ángulo</u> formado por el plano π y la recta $s \equiv \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$

$$\left[sen\,\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}; \quad \alpha = 18^o\,26' \right]$$

---

33 Considera los puntos A(1, −1, 2), B(1, 3, 0) y C(0, 0, 1). Halla el punto simétrico de A respecto a la recta r = R(B, C). [A'(−17//11, −7/11, 6/11)]

34 Los puntos A(1, 0, 2) y B(−1, 0, −2) son vértices opuestos de un cuadrado.

a) Calcula el área del cuadrado. [A = 10 u^2]

b) Halla una ecuación plano el plano perpendicular al segmento [A, B] que pasa por su punto medio. (Plano mediador). [$\pi \equiv x \quad +2z = 0$]

35 Considera el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 2 = 0$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-5}{-2} = y = \dfrac{z-6}{m}$.

a) Estudia la posición relativa de r y π según los valores de m. [$m = -3$, r ∥ π; $m \neq -3$, r corta a π]

b) Para m = −3, halla el plano que contiene a r y es perpendicular a π. [$\pi' \equiv x - 4y - 2z + 7 = 0$]

c) Para m = −3, halla el plano que contiene a r y es paralelo a π. [$\pi'' \equiv 2x + y - z - 4 = 0$]

36 Considera el punto P(3, 2, 0) y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r. [$\pi \equiv x + 2y - 4z - 7 = 0$]

b) Determina las coordenadas del punto simétrico de P respecto a la recta r. [P'(−1, 0, −2)]

37 Determina los puntos de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y - 1 = \dfrac{z-3}{2} \end{cases}$ que equidistan de los planos $\pi' \equiv x \quad + z = 1$ y $\pi'' \equiv \quad y - z = 3$. [$M_1$(0, −4/3, 5/3) y M_2(0, 4, 9)]

38 Determina el punto P de la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{3}$ que equidista de los planos $\pi_1 \equiv x + y + z + 3 = 0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -3 + \alpha \\ y = -\alpha + \beta \\ z = -6 - \beta \end{cases}$. [P'(−1, −2, −3)]

39 Sean la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-3}{-1}$ y el plano $\pi \equiv x - y + z + 1 = 0$.

Calcula el área del triángulo (A,B,C) siendo: A el punto de corte de la recta r y el plano π, B el punto (2, 1, 2) de la recta r y C la proyección ortogonal de B sobre el plano π. [A = $16\sqrt{6}/6$ u^2]

40 Sea $\pi \equiv 3x - y + 2z - 4 = 0$.

a) Halla el plano π_1 que es paralelo a π y pasa por P(1, −2, 2). [$\pi_1 \equiv 3x - y + 2z - 9 = 0$]

b) Halla la ecuación del plano π_2 que es perpendicular a ambos y contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - 4z - 1 = 0 \end{cases}$ [$\pi \equiv 5x + y - 7z - 3 = 0$]

41 Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x + z - a = 0 \\ y - az - 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x - y \quad = b$.

a) Determina a y b sabiendo que r está contenida en π. [a = −2; b = −5]

b) Halla la ecuación de un plano que contenga a la recta r y sea perpendicular a π. [$\pi_1 \equiv x + 2y + 5z = 0$]

42 Considera los planos $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y - z = 2$.

a) Determina la recta r que pasa por A(1, 2, 3) y no corta a ninguno de los planos dados. $[r \equiv (x,y,z) = (1,2,3) + \lambda \cdot (0,1,1)]$

b) Determina los puntos que <u>equidistan</u> de A(1, 2, 3) y B(2, 1, 0) y pertenecen a la recta s intersección de los planos dados. [P(1, 17/8, 9/8)]

---

43 Considera los puntos A(0, 3, −1) y B(0, 1, 5).

a) Sea C(x, 4, 3). Calcula los valores de x sabiendo que el rectángulo (A,B,C) tiene un <u>ángulo recto</u> en C. $[x = \pm\sqrt{5}]$

b) Halla la ecuación del plano que pasa por los puntos P(0, 1, 5) y Q(3, 4, 3) y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ $[\pi \equiv 13x - 7y + 9z - 38 = 0]$

---

44 Considera los puntos A(1, −3, 2), B(1, 1, 2) y C(1, 1, −1).

a) ¿Pueden se A, B y C los vértices de un triángulo rectángulo? [Sí: $\hat{B} = 90^o$]

b) Halla, si es posible, las coordenadas de un punto D para que el paralelogramo (A,B,C,D) sea rectángulo. [D(1, −3, −1)]

---

45 Considera los puntos A(2, 0, 1), B(−1, 1, 2), C(2, 2, 1) y D(3, 1, 0).

a) Halla la ecuación del plano π determinado por B, C y D. $[\pi \equiv -x + y - 2z + 2 = 0]$

b) Halla el <u>punto simétrico</u> de A respecto al plano hallado. [A'(4/3, 2/3, −1/3]

---

46 Halla un punto M de la recta $r \equiv x = y = z$ y un punto N de la recta $r \equiv x = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$, de forma que la <u>distancia</u> entre M y N sea <u>mínima</u>. [M(−1/7, −1/7, −1/7) y N(2/7, −2/7, −3/7)]

---

47 Sea el punto P(−2, 3, 0) y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ 2x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$.

a) Halla la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r. $[\pi \equiv 5x + y + 4z + 7 = 0]$

b) Determina el <u>punto</u> de r <u>más próximo</u> a P. [P'(−14/13, −9/13, −3/13)]

---

48 Se sabe que el plano π corta a [las direcciones positivas de] los ejes coordenados en los puntos A, B y C, siendo las longitudes de los segmentos OA, OB y OC de 4 unidades. (O es el origen de coordenadas).

a) Halla la ecuación del plano π. [<u>Ec. Canónica</u>] $[\pi \equiv x + y + z = 4]$

b) Calcula el <u>área del triángulo</u> (A,B,C). [A = $8\sqrt{3}$ u^2]

c) Determina un plano paralelo a π, que diste 4 unidades del origen de coordenadas.
[<u>Ec. Normal</u>] $[\pi_1 \equiv x + y + z \pm 4\sqrt{3} = 0]$

---

49 Halla la recta <u>perpendicular común</u> a las rectas: $\begin{cases} r \equiv \{x = 1 + \alpha; \quad y = \alpha; \quad z = -\alpha\} \\ s \equiv \{x = \beta; \quad y = 2 + 2\beta; \quad z = 0\} \end{cases}$

$[t \equiv \{x = -1 + 2\lambda; \quad y = -\lambda; \quad z = \lambda\}]$

---

50 Se consideran las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = -1 \end{cases}$.

Halla una ecuación de la recta perpendicular común. [$t \equiv \{x = 1-\alpha; \quad y = 1+\alpha; \quad z = -1\}$]

---

51 Sean los puntos A(1, 1, 0), B(1, 1, 2) y C(1, −1, 1).

a) Comprueba que no están alineados y calcula el área del triángulo que determinan. [A = 2 u^2]

b) Halla la ecuación del plano que contiene al punto A y es perpendicular a la recta determinada por B y C. [$\pi \equiv 2y + z - 2 = 0$]

---

52 Considera la recta $r \equiv \frac{x-1}{\alpha} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$ y el plano $\pi \equiv 2x - y + \beta z = 0$. Determina α y β en los siguientes casos:

a) r es perpendicular a π. [α = −8; β = −1/2]

b) r está contenida en π. [α = 4; β = −2]

---

53 Sea P' el punto simétrico del punto P(1, −3, 7) respecto a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - y - z - 2 = 0 \\ x + y - z + 6 = 0 \end{cases}$

Calcula la distancia de P a P'. [d(P, P') = $2\sqrt{3}$ u]

---

54 Dados los puntos A(2, 1, 1) y B(0, 0, 1), halla los puntos C del eje OX tales que el área del triángulo (A,B,C) es 2 u^2. [$C_1(+\sqrt{11},0,0)$ y $C_2(-\sqrt{11},0,0)$]

---

55 Considera la recta definida por $r \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 0 \end{cases}$ y la recta s que pasa por los puntos A(2, 1, 0) y B(1, 0, −1).

a) Estudia la posición relativa de ambas rectas. [Secantes]

b) Determina el punto C de la recta r tal que los segmentos CA y CB sean perpendiculares. [$C_1(2,0,0)$ y $C_2(1,1,-1)$]
