

1 Tres caballos, A, B y C, participan en una carrera que sólo puede ganar uno. La probabilidad de que gane A es el doble de la de que gane B, y la probabilidad de que gane B es el doble de la de que gane C. ¿Cuáles son las respectivas probabilidades de ganar; esto es, $P(A)$, $P(B)$ y $P(C)$? ¿Cuál es la probabilidad de que gane B ó C?

Sea $P(C) = p$. Entonces $P(B) = 2p$ y $P(A) = 4p$. El que gane A o B o C son sucesos mutuamente excluyentes (incompatibles) y el que gane alguno de ellos es el suceso seguro. Entonces

$$P(A \cup B \cup C) = P(\Omega) = 1 \rightarrow P(A) + P(B) + P(C) = 1 \rightarrow 7p = 1 \rightarrow p = \frac{1}{7},$$

$$\text{luego } P(A) = \frac{4}{7}, P(B) = \frac{2}{7} \text{ y } P(C) = \frac{1}{7}.$$

$$\text{Además, } P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{3}{7}.$$

2 De un conjunto de 12 objetos, de los cuales 4 son defectuosos, escogemos dos al azar. Calcular la probabilidad de los sucesos:

A = "ambos objetos son defectuosos",

B = "ambos son no defectuosos", y

C = "al menos uno es defectuoso".

• Sea $U = \{d_1, \dots, d_4; b_1, \dots, b_8\}$ el conjunto de los cuatro objetos defectuosos y los ocho restantes buenos. Sea \mathfrak{E}_1 el experimento aleatorio consistente en "**elegir al azar, y simultáneamente, dos objetos de U**". El espacio muestral asociado al experimento es:

$$\Omega_1 = \mathcal{P}_2(U) = \{\{x, y\} | x, y \in U, x \neq y\}, \text{ con } \#\Omega_1 = \binom{12}{2} = 66$$

Así, Ω consta de 66 sucesos elementales equiprobables: los 66 subconjuntos binarios de U . Entonces, aplicando la regla de LAPLACE:

$$A = \text{"ambos defectuosos"} \rightarrow \#A = \binom{4}{2} = 6 \rightarrow P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega_1} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$$

$$B = \text{"ambos no defectuosos"} \rightarrow \#A = \binom{8}{2} = 28 \rightarrow P(A) = \frac{\#B}{\#\Omega_1} = \frac{28}{66} = \frac{14}{33}$$

$$C = \text{"al menos uno defectuoso"} = \bar{B} \rightarrow P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{14}{33} = \frac{19}{33}$$

- Equivalentemente, sea \mathfrak{E}_2 el experimento aleatorio consistente en **“elegir al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos objetos de U ”**. El espacio muestral es ahora:

$$\Omega_2 = \{(d_{1^\circ}, d_{2^\circ}), (d_{1^\circ}, b_{2^\circ}), (b_{1^\circ}, d_{2^\circ}), (b_{1^\circ}, b_{2^\circ})\}$$

Entonces: $P(A) = P\{(d_{1^\circ}, d_{2^\circ})\} = P(d_{1^\circ}) \cdot P(d_{2^\circ} | d_{1^\circ}) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{1}{11}$

$$P(B) = P\{(b_{1^\circ}, b_{2^\circ})\} = P(b_{1^\circ}) \cdot P(b_{2^\circ} | b_{1^\circ}) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{56}{132} = \frac{14}{33}$$

$$C = \text{“al menos uno defectuoso”} = \bar{B} \rightarrow P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{14}{33} = \frac{19}{33}$$

- Puesto que el ejercicio no especifica de qué modo se eligen los dos objetos a azar, también podemos considerar el experimento aleatorio \mathfrak{E}_3 consistente en **“elegir al azar, sucesivamente y con reemplazamiento, dos objetos de U ”**. El espacio muestral es ahora el mismo de antes, pero las dos elecciones son independientes:

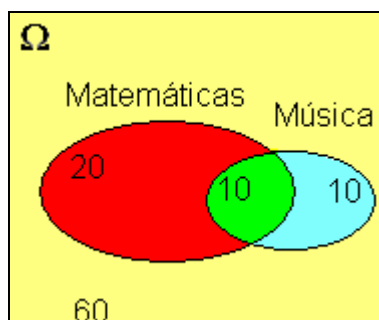
$$\Omega_3 = \{(d_{1^\circ}, d_{2^\circ}), (d_{1^\circ}, b_{2^\circ}), (b_{1^\circ}, d_{2^\circ}), (b_{1^\circ}, b_{2^\circ})\}$$

Entonces: $P(A) = P\{(d_{1^\circ}, d_{2^\circ})\} = P(d_{1^\circ}) \cdot P(d_{2^\circ} | d_{1^\circ}) = P(d_{1^\circ}) \cdot P(d_{2^\circ}) = \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{12} = \frac{1}{9}$

$$P(B) = P\{(b_{1^\circ}, b_{2^\circ})\} = P(b_{1^\circ}) \cdot P(b_{2^\circ} | b_{1^\circ}) = P(b_{1^\circ}) \cdot P(b_{2^\circ}) = \frac{8}{12} \cdot \frac{8}{12} = \frac{4}{9}$$

$$C = \text{“al menos uno defectuoso”} = \bar{B} \rightarrow P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

3 De un total de 100 estudiantes, 30 están matriculados en Matemáticas, 20 en Música y 10 lo están en Matemáticas y Música. Si se elige al azar un estudiante, ¿cuál es la probabilidad de que esté matriculado en Matemáticas o en Música (o en ambas)?



$$P(\text{Mat}) = \frac{30}{100} = 0,3$$

$$P(\text{Mús}) = \frac{20}{100} = 0,2$$

$$P(\text{Mat} \cap \text{Mús}) = \frac{10}{100} = 0,1$$

$$P(\text{Mat} \cup \text{Mús}) = P(\text{Mat}) + P(\text{Mús}) - P(\text{Mat} \cap \text{Mús}) = 0,3 + 0,2 - 0,1 = 0,4 \quad (= 1 - 0,6)$$

4 Sean A y B sucesos de un espacio muestral tales que $P(A) = 3/8$, $P(B) = 1/2$ y $P(A \cap B) = 1/4$. Calcular $P(A \cup B)$, $P(A^C)$, $P(B^C)$, $P(A^C \cap B^C)$, $P(A^C \cup B^C)$, $P(A \cap B^C)$ y $P(A^C \cap B)$.

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3+4-2}{8} = \frac{5}{8}$
- $P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$
- $P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
- $P(A^C \cap B^C) = P[(A \cup B)^C] = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$
- $P(A^C \cup B^C) = P[(A \cap B)^C] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- $P(A \cap B^C) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$
- $P(A^C \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

5 Tenemos tres cajas con la siguiente composición:

Caja I: 10 bombillas de las que 4 son defectuosas.

Caja II: 6 bombillas de las que 1 es defectuosa.

Caja III: 8 bombillas de las que 3 son defectuosas.

- Seleccionamos una caja al azar, y de ella escogemos una bombilla también al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la bombilla sea defectuosa?
- Si se elige una bombilla al azar y resulta ser defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la caja I?

a) Teorema de la probabilidad total:

$$P(D) = P(C_I) \cdot P(D | C_I) + P(C_{II}) \cdot P(D | C_{II}) + P(C_{III}) \cdot P(D | C_{III}) =$$

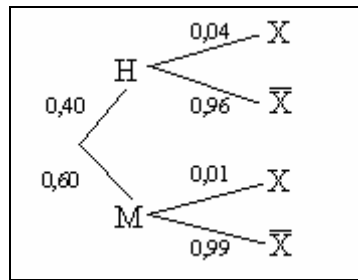
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{10} + \frac{1}{6} + \frac{3}{8} \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \frac{3}{8} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{48+20+45}{120} = \frac{113}{360}$$

b) Teorema de BAYES:

$$P(C_I | D) = \frac{P(C_I) \cdot P(D | C_I)}{\sum_{i=I}^{III} P(C_i) \cdot P(D | C_i)} = \frac{\frac{4}{30}}{\frac{113}{360}} = \frac{48}{113}$$

6 En cierta Universidad, el 4% de los hombres y el 1% de las mujeres miden más de 180 cm. Además, el 60% de los estudiantes son mujeres. Si se selecciona al azar un estudiante y resulta de una estatura mayor de 180 cm, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Sea X el suceso “estatura > 180 cm”, y \bar{X} el suceso contrario “estatura ≤ 180 cm”. Entonces:



$$\begin{aligned}
 P(M | X) &= \frac{P(M \cap X)}{P(X)} = \frac{P(M) \cdot P(X | M)}{P(H) \cdot P(X | H) + P(M) \cdot P(X | M)} = \\
 &= \frac{0,60 \cdot 0,01}{0,40 \cdot 0,04 + 0,60 \cdot 0,01} = \frac{60 \cdot 1}{40 \cdot 4 + 60 \cdot 1} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}
 \end{aligned}$$

7 Blanca y Alfredo escriben, al azar, una vocal cada uno en papeles distintos. Determinar el espacio muestral asociado al experimento. Calcular la probabilidad de que no escriban la misma vocal.

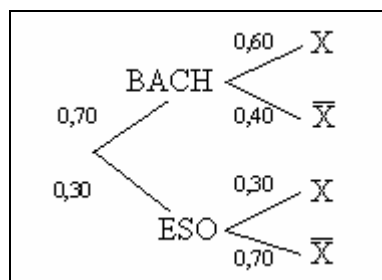
Sea $V = \{a, e, i, o, u\}$ el conjunto de las cinco vocales. El espacio muestral puede ser $\Omega = V \times V$, con $\#\Omega = VR_{5,2} = 5^2 = 25$ sucesos elementales equiprobables. Consideremos el suceso $A =$ “los dos escriben la misma vocal” $= \{(a,a),(e,e),(i,i),(o,o),(u,u)\}$. El suceso pedido es el contrario de A , $B = \Omega - A$, con $\#B = 25 - 5 = 20$. Así:

$$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} = 0,80$$

8 El 70% de los alumnos de un Instituto son de Bachillerato y el resto de ESO. De los alumnos de Bachillerato, el 60% estudia más de 3 horas al día, mientras que sólo el 30% de los de ESO estudia más de 3 horas al día.

- Calcular la probabilidad de que un alumno de dicho Instituto, elegido al azar, estudie más de 3 horas al día.
- Sabiendo que un alumno de este Instituto, que ha sido elegido al azar, estudia más de 3 horas al día, ¿cuál es la probabilidad de que sea de Bachillerato?

Sea X el suceso “horas de estudio diarias > 3 ” y \bar{X} el suceso contrario “horas ≤ 3 ”. Entonces:



a) Teorema de la probabilidad total:

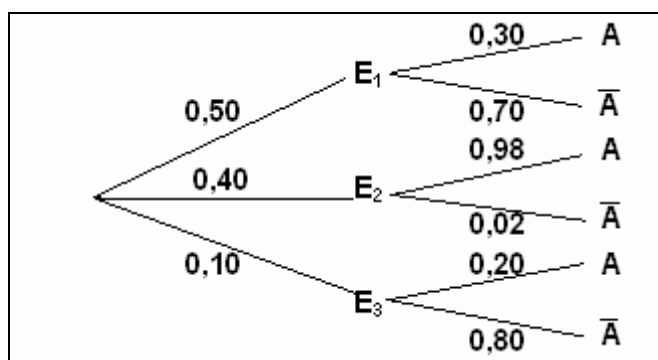
$$P(X) = P(BACH) \cdot P(X | BACH) + P(ESO) \cdot P(X | ESO) = 0,70 \cdot 0,60 + 0,30 \cdot 0,30 = 0,51$$

b) Teorema de BAYES:

$$\begin{aligned} P(BACH | X) &= \frac{P(BACH \cap X)}{P(X)} = \frac{P(BACH) \cdot P(X | BACH)}{P(BACH) \cdot P(X | BACH) + P(ESO) \cdot P(X | ESO)} = \\ &= \frac{0,70 \cdot 0,60}{0,70 \cdot 0,60 + 0,30 \cdot 0,30} = \frac{7 \cdot 6}{7 \cdot 6 + 3 \cdot 3} = \frac{42}{51} = \frac{14}{17} \end{aligned}$$

9 Un paciente con un conjunto de síntomas puede tener cualquiera de las tres enfermedades E_1 , E_2 ó E_3 con probabilidades 0'50, 0'40 y 0'10, respectivamente. Para precisar el diagnóstico se somete al paciente a un análisis de sangre que da positivo (designemos por A este hecho) en las personas que padecen E_1 , E_2 ó E_3 con probabilidades 0'30, 0'98 y 0'20, respectivamente.

- ¿En qué porcentaje de la población de pacientes con tales síntomas el análisis da positivo?
- Si a una persona con los síntomas se le realiza el análisis y da positivo, ¿cuál es la enfermedad más probable?



a) Teorema de la probabilidad total:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(E_1) \cdot P(A | E_1) + P(E_2) \cdot P(A | E_2) + P(E_3) \cdot P(A | E_3) = \\ &= 0,50 \cdot 0,30 + 0,40 \cdot 0,98 + 0,10 \cdot 0,20 = 0,562 = 56,2\% \end{aligned}$$

b) Teorema de BAYES:

$$P(E_1 | A) = \frac{P(E_1) \cdot P(A | E_1)}{P(A)} = \frac{0,50 \cdot 0,30}{0,562} = \frac{0,150}{0,562} = 0,267$$

$$P(E_2 | A) = \frac{P(E_2) \cdot P(A | E_2)}{P(A)} = \frac{0,40 \cdot 0,98}{0,562} = \frac{0,392}{0,562} = 0,698$$

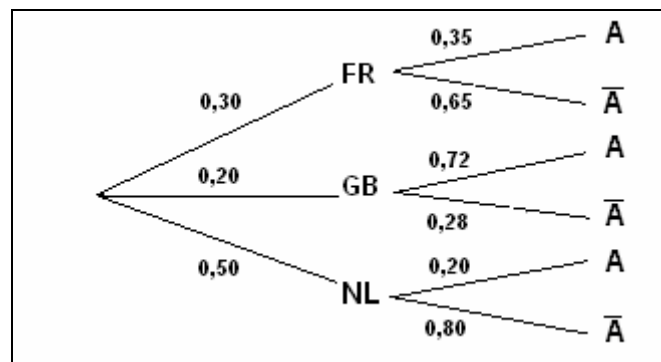
$$P(E_3 | A) = \frac{P(E_3) \cdot P(A | E_3)}{P(A)} = \frac{0,10 \cdot 0,20}{0,562} = \frac{0,020}{0,562} = 0,036$$

La enfermedad más probable es, por tanto, E_2 .

10 La explotación de un yacimiento de petróleo en el Mar del Norte es encargada a una compañía francesa en un 30%, a una británica en un 20% y a otra holandesa en un 50%. La probabilidad de que la perforadora francesa encuentre petróleo es 0'35, 0'72 si es la compañía británica y 0'20 si se trata de la compañía holandesa.

- Hallar la probabilidad de encontrar petróleo.
- Si una perforadora ha encontrado petróleo, hallar la probabilidad de que sea de la compañía holandesa.

Designemos por A el suceso "encontrar petróleo".



a) Teorema de la probabilidad total:

$$P(A) = P(FR) \cdot P(A | FR) + P(GB) \cdot P(A | GB) + P(NL) \cdot P(A | NL) =$$

$$= 0,30 \cdot 0,35 + 0,20 \cdot 0,72 + 0,50 \cdot 0,20 = 0,3490$$

b) Teorema de BAYES:

$$P(NL | A) = \frac{P(NL) \cdot P(A | NL)}{P(A)} = \frac{0,50 \cdot 0,20}{0,349} = \frac{0,10}{0,349} = 0,2865$$

11 En un Instituto hay dos salas de visitas donde los tutores reciben a los padres de los alumnos. Ambas salas están ocupadas simultáneamente el 5% de las ocasiones en que son requeridas, no estándolo ninguna en el 75% de las ocasiones.

Si cuando un tutor va a atender a un padre una de las salas está ocupada, ¿cuál es la probabilidad de que la otra también lo esté?

Consideremos los sucesos $A = \text{"sala 1ª ocupada"}$ y $B = \text{"sala 2ª ocupada"}$. Debemos calcular

$$P(A \cap B | A \cup B) = \frac{P[(A \cap B) \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(\overline{A \cap B})} = \frac{P(A \cap B)}{1 - P(\overline{A \cap B})} =$$

$$= \frac{0,05}{1 - 0,75} = \frac{0,05}{0,25} = 0,20$$

12 En la construcción de unos determinados edificios pueden aparecer anomalías debidas a dos causas que son independientes:

A: fallos de cimentación, con $P(A) = 0,04$, y

B: mala calidad de los materiales, con $P(B) = 0,03$.

- Calcular la probabilidad de que en un determinado edificio no aparezca ninguna anomalía.
- Calcular la probabilidad de que aparezcan fallos de cimentación y no de mala calidad de los materiales.
- Un edificio puede presentar anomalías, con probabilidad $P(A \cup B)$, o no presentar ninguna anomalía, con probabilidad $P(A^c \cap B^c)$. En el primer caso, la probabilidad de que el edificio se desplome es del 80%, mientras que en el segundo es del 5%.
 - Calcular la probabilidad de que el edificio se desplome.
 - Si el edificio se ha desplomado, ¿cuál es la probabilidad de que se haya producido alguna de las anomalías?

Tenemos que $P(A) = 0,04$ y $P(B) = 0,03$ y, como son independientes

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,0012.$$

Entonces, la probabilidad de que aparezca alguna anomalía es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,0688.$$

- a) La probabilidad de que no ocurra ninguna anomalía es, por tanto,

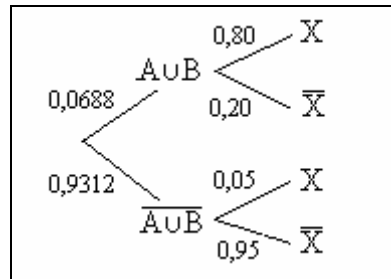
$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,0688 = 0,9312$$

(O bien, $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0,96 \cdot 0,97 = 0,9312$, ya que si A y B son independientes, también lo son sus contrarios).

b) $P(A \cap \bar{B}) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0,04 - 0,0012 = 0,0388$.

c) Sea X el suceso “el edificio se desploma”. Según la información,

$$P(X | A \cup B) = 0,80 \quad \text{y} \quad P(X | \overline{A \cup B}) = P(X | \overline{A \cup B}) = 0,05$$



c1) Entonces, por el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que el edificio se desplome es:

$$\begin{aligned} P(X) &= P(A \cup B) \cdot P(X | A \cup B) + P(\overline{A \cup B}) \cdot P(X | \overline{A \cup B}) = \\ &= (0,0688) \cdot (0,80) + (0,9312) \cdot (0,05) = 0,1016 = 10,16\% \end{aligned}$$

c2) Por el teorema de BAYES,

$$\begin{aligned} P(A \cup B | X) &= \frac{P(A \cup B) \cdot P(X | A \cup B)}{P(A \cup B) \cdot P(X | A \cup B) + P(\overline{A \cup B}) \cdot P(X | \overline{A \cup B})} = \\ &= \frac{(0,0688) \cdot (0,80)}{0,1016} = 0,5417 = 54,17\% \end{aligned}$$