1 Tres caballos, A, B y C, participan en una carrera que sólo puede ganar uno. La probabilidad de que gane A es el doble de la de que gane B, y la probabilidad de que gane B es el doble de la de que gane C. ¿Cuáles son las respectivas probabilidades de ganar; esto es, P(A), P(B) y P(C)? ¿Cuál es la probabilidad de que gane B ó C?

Sea *P(C) = p*. Entonces *P(B) = 2p* y *P(A) = 4p*. El que gane A o B o C son sucesos mutuamente excluyentes (incompatibles) y el que gane alguno de ellos es el suceso seguro. Entonces

$$P(A \dot{\cup} B \dot{\cup} C) = P(\Omega) = 1 \to P(A) + P(B) + P(C) = 1 \to 7p = 1 \to p = \frac{1}{7},$$

luego $P(A) = \frac{4}{7}$, $P(B) = \frac{2}{7}$ y $P(C) = \frac{1}{7}$.

Además, $P(B \dot{\cup} C) = P(B) + P(C) = \frac{3}{7}$.

2 De un conjunto de 12 objetos, de los cuales 4 son defectuosos, escogemos dos al azar. Calcular la probabilidad de los sucesos:

A = "ambos objetos son defectuosos",
B = "ambos son no defectuosos", y
C = "al menos uno es defectuoso".

- Sea $U = \{d_1, \ldots, d_4; b_1, \ldots, b_8\}$ el conjunto de los cuatro objetos defectuosos y los ocho restantes buenos. Sea $\mathcal{E}_1$ el experimento aleatorio consistente en ***"elegir al azar, y simultáneamente, dos objetos de U"***. El espacio muestral asociado al experiemento es:

$$\Omega_1 = \mathcal{P}_2(U) = \{\{x, y\} | x, y \in U, \quad x \neq y\}, \text{ con } \#\Omega_1 = \binom{12}{2} = 66$$

Así, Ω consta de 66 sucesos elementales equiprobables: los 66 subconjuntos binarios de U. Entonces, aplicando la regla de LAPLACE:

A = "ambos defectuosos" $\to \# A = \binom{4}{2} = 6 \to \quad P(A) = \frac{\# A}{\#\Omega_1} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$

B = "ambos no defectuosos" $\to \# A = \binom{8}{2} = 28 \to \quad P(A) = \frac{\# B}{\#\Omega_1} = \frac{28}{66} = \frac{14}{33}$

C = "al menos uno defectuoso" = $\overline{B} \to \quad P(C) = 1 - P(C) = 1 - \frac{14}{33} = \frac{19}{33}$

• Equivalentemente, sea $\mathcal{E}_2$ el experimento aleatorio consistente en ***"elegir al azar, sucesivamente y sin reemplazamiento, dos objetos de U"***. El espacio muestral es ahora:

$$\Omega_2 = \{(d_{1^o}, d_{2^o}), (d_{1^o}, b_{2^o}), (b_{1^o}, d_{2^o}), (b_{1^o}, b_{2^o})\}$$

Entonces: $$P(A) = P\{(d_{1^o}, d_{2^o})\} = P(d_{1^o}) \cdot P(d_{2^o} \mid d_{1^o}) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{1}{11}$$

$$P(B) = P\{(b_{1^o}, b_{2^o})\} = P(b_{1^o}) \cdot P(b_{2^o} \mid b_{1^o}) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{56}{132} = \frac{14}{33}$$

C = "al menos uno defectuoso" = $\overline{B}$ $\rightarrow$ $P(C) = 1 - P(C) = 1 - \frac{14}{33} = \frac{19}{33}$

• Puesto que el ejercicio no especifica de qué modo se eligen los dos objetos a azar, también podemos considerar el experimento aleatorio $\mathcal{E}_3$ consistente en ***"elegir al azar, sucesivamente y con reemplazamiento, dos objetos de U"***. El espacio muestral es ahora el mismo de antes, pero las dos elecciones son independientes:

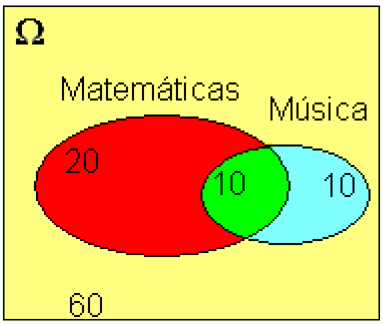
$$\Omega_3 = \{(d_{1^o}, d_{2^o}), (d_{1^o}, b_{2^o}), (b_{1^o}, d_{2^o}), (b_{1^o}, b_{2^o})\}$$

Entonces: $$P(A) = P\{(d_{1^o}, d_{2^o})\} = P(d_{1^o}) \cdot P(d_{2^o} \mid d_{1^o}) = P(d_{1^o}) \cdot P(d_{2^o}) = \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{12} = \frac{1}{9}$$

$$P(B) = P\{(b_{1^o}, b_{2^o})\} = P(b_{1^o}) \cdot P(b_{2^o} \mid b_{1^o}) = P(b_{1^o}) \cdot P(b_{2^o}) = \frac{8}{12} \cdot \frac{8}{12} = \frac{4}{9}$$

C = "al menos uno defectuoso" = $\overline{B}$ $\rightarrow$ $P(C) = 1 - P(C) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

3 De un total de 100 estudiantes, 30 están matriculados en Matemáticas, 20 en Música y 10 lo están en Matemáticas y Música. Si se elige al azar un estudiante, ¿cuál es la probabilidad de que esté matriculado en Matemáticas o en Música (o en ambas)?



$$P(Mat) = \frac{30}{100} = 0{,}3$$
$$P(Mús) = \frac{20}{100} = 0{,}2$$
$$P(Mat \cap Mús) = \frac{10}{100} = 0{,}1$$
$$P(Mat \cup Mús) = P(Mat) + P(Mús) - P(Mat \cap Mús) =$$
$$= 0{,}3 + 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}4 \quad (= 1 - 0{,}6)$$

4 Sean A y B sucesos de un espacio muestral tales que P(A) = 3/8, P(B) = 1/2 y P(A∩B) = 1/4. Calcular P(A∪B), P(AC), P(BC), P(AC∩BC), P(AC∪BC), P(A∩BC) y P(AC∩B).

- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3+4-2}{8}=\frac{5}{8}$
- $P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$
- $P(B^C)=1-P(B)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$
- $P(A^C\cap B^C)=P\left[(A\cup B)^C\right]=1-P(A\cup B)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$
- $P(A^C\cup B^C)=P\left[(A\cap B)^C\right]=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
- $P(A\cap B^C)=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$
- $P(A^C\cap B)=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

5 Tenemos tres cajas con la siguiente composición:

Caja I: 10 bombillas de las que 4 son defectuosas.
Caja II: 6 bombillas de las que 1 es defectuosa.
Caja III: 8 bombillas de las que 3 son defectuosas.

a) Seleccionamos una caja al azar, y de ella escogemos una bombilla también al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la bombilla sea defectuosa?
b) Si se elige una bombilla al azar y resulta ser defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la caja I?

a) Teorema de la probabilidad total:

$$P(D)=P(C_I)\cdot P(D\,|\,C_I)+P(C_{II})\cdot P(D\,|\,C_{II})+P(C_{III})\cdot P(D\,|\,C_{III})=$$

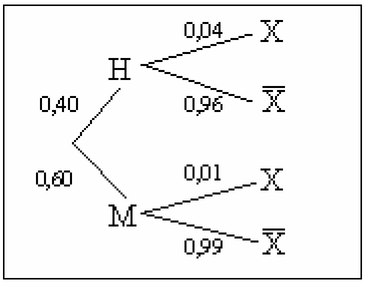
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{4}{10}+\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{48+20+45}{120}=\frac{113}{360}$$

b) Teorema de BAYES:

$$P(C_I\,|\,D)=\frac{P(C_I)\cdot P(D\,|\,C_I)}{\sum_{i=I}^{III}P(C_i)\cdot P(D\,|\,C_i)}=\frac{\frac{4}{30}}{\frac{113}{360}}=\frac{48}{113}$$

6 En cierta Universidad, el 4% de los hombres y el 1% de las mujeres miden más de 180 cm. Además, el 60% de los estudiantes son mujeres. Si se selecciona al azar un estudiante y resulta de una estatura mayor de 180 cm, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Sea X el suceso "estatura > 180 cm", y $\overline{X}$ el suceso contrario "estatura ≤ 180 cm". Entonces:



$$P(M\mid X)=\frac{P(M\cap X)}{P(X)}=\frac{P(M)\cdot P(X\mid M)}{P(H)\cdot P(X\mid H)+P(M)\cdot P(X\mid M)}=$$

$$=\frac{0{,}60\cdot 0{,}01}{0{,}40\cdot 0{,}04+0{,}60\cdot 0{,}01}=\frac{60\cdot 1}{40\cdot 4+60\cdot 1}=\frac{60}{220}=\frac{3}{11}$$

7 Blanca y Alfredo escriben, al azar, una vocal cada uno en papeles distintos. Determinar el espacio muestral asociado al experimento. Calcular la probabilidad de que no escriban la misma vocal.

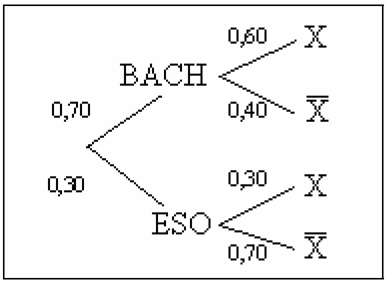
Sea V = {a, e, i, o, u} el conjunto de las cinco vocales. El espacio muestral puede ser $\Omega = V\times V$, con $\#\Omega = VR_{5,2} = 5^2 = 25$ sucesos elementales equiprobables. Consideremos el suceso A = "los dos escriben la misma vocal" = {(a,a),(e,e),(i,i),(o,o),(u,u)}. El suceso pedido es el contrario de A, B = Ω-A, con #B = 25-5 = 20. Así:

$$P(B)=\frac{\#B}{\#\Omega}=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}=0{,}80$$

8 El 70% de los alumnos de un Instituto son de Bachillerato y el resto de ESO. De los alumnos de Bachillerato, el 60% estudia más de 3 horas al día, mientras que sólo el 30% de los de ESO estudia más de 3 horas al día.

a) Calcular la probabilidad de que un alumno de dicho Instituto, elegido al azar, estudie más de 3 horas al día.
b) Sabiendo que un alumno de este Instituto, que ha sido elegido al azar, estudia más de 3 horas al día, ¿cuál es la probabilidad de que sea de Bachillerato?

Sea X el suceso "horas de estudio diarias > 3" y $\overline{X}$ el suceso contrario "horas ≤ 3". Entonces:



a) Teorema de la probabilidad total:

$$P(X) = P(BACH) \cdot P(X \mid BACH) + P(ESO) \cdot P(X \mid ESO) = 0{,}70 \cdot 0{,}60 + 0{,}30 \cdot 0{,}30 = 0{,}51$$

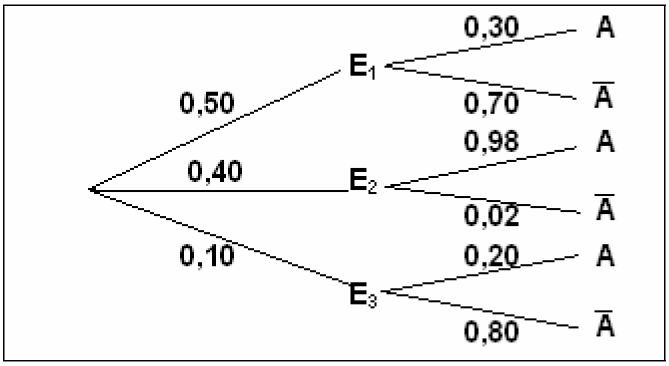
b) Teorema de BAYES:

$$P(BACH \mid X) = \frac{P(BACH \cap X)}{P(X)} = \frac{P(BACH) \cdot P(X \mid BACH)}{P(BACH) \cdot P(X \mid BACH) + P(ESO) \cdot P(X \mid ESO)} =$$

$$= \frac{0{,}70 \cdot 0{,}60}{0{,}70 \cdot 0{,}60 + 0{,}30 \cdot 0{,}30} = \frac{7 \cdot 6}{7 \cdot 6 + 3 \cdot 3} = \frac{42}{51} = \frac{14}{17}$$

9 Un paciente con un conjunto de síntomas puede tener cualquiera de las tres enfermedades E_1, E_2 ó E_3 con probabilidades 0'50, 0'40 y 0'10, respectivamente. Para precisar el diagnóstico se somete al paciente a un análisis de sangre que da positivo (designemos por A este hecho) en las personas que padecen E_1, E_2 ó E_3 con probabilidades 0'30, 0'98 y 0'20, respectivamente.

a) ¿En qué porcentaje de la población de pacientes con tales síntomas el análisis da positivo?
b) Si a una persona con los síntomas se le realiza el análisis y da positivo, ¿cuál es la enfermedad más probable?



a) Teorema de la probabilidad total:

$$P(A) = P(E_1) \cdot P(A \mid E_1) + P(E_2) \cdot P(A \mid E_2) + P(E_3) \cdot P(A \mid E_3) =$$

$$= 0{,}50 \cdot 0{,}30 + 0{,}40 \cdot 0{,}98 + 0{,}10 \cdot 0{,}20 = 0{,}562 = 56{,}2\%$$

b) Teorema de BAYES:

$$P(E_1 \mid A) = \frac{P(E_1) \cdot P(A \mid E_1)}{P(A)} = \frac{0{,}50 \cdot 0{,}30}{0{,}562} = \frac{0{,}150}{0{,}562} = 0{,}267$$

$$P(E_2 \mid A) = \frac{P(E_2) \cdot P(A \mid E_2)}{P(A)} = \frac{0{,}40 \cdot 0{,}98}{0{,}562} = \frac{0{,}392}{0{,}562} = 0{,}698$$

$$P(E_3 \mid A) = \frac{P(E_3) \cdot P(A \mid E_3)}{P(A)} = \frac{0{,}10 \cdot 0{,}20}{0{,}562} = \frac{0{,}020}{0{,}562} = 0{,}036$$

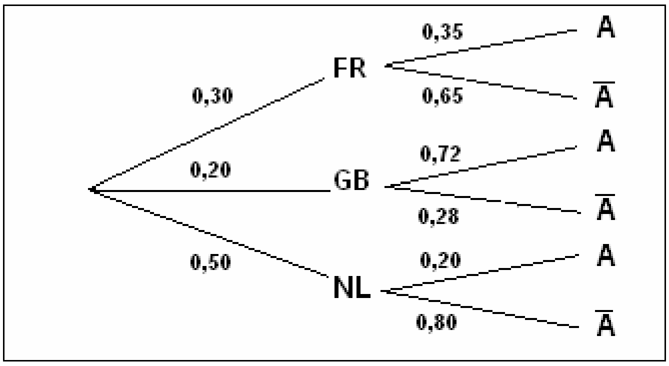
La enfermedad más probable es, por tanto, E_2.

10 La explotación de un yacimiento de petróleo en el Mar del Norte es encargada a una compañía francesa en un 30%, a una británica en un 20% y a otra holandesa en un 50%. La probabilidad de que la perforadora francesa encuentre petróleo es 0'35, 0'72 si es la compañía británica y 0'20 si se trata de la compañía holandesa.

a) Hallar la probabilidad de encontrar petróleo.

b) Si una perforadora ha encontrado petróleo, hallar la probabilidad de que sea de la compañía holandesa.

Designemos por A el suceso "encontrar petróleo".



a) Teorema de la probabilidad total:

$$P(A) = P(FR) \cdot P(A \mid FR) + P(GB) \cdot P(A \mid GB) + P(NL) \cdot P(A \mid NL) =$$

$$= 0{,}30 \cdot 0{,}35 + 0{,}20 \cdot 0{,}72 + 0{,}50 \cdot 0{,}20 = 0{,}3490$$

b) Teorema de BAYES:

$$P(NL \mid A) = \frac{P(NL) \cdot P(A \mid NL)}{P(A)} = \frac{0{,}50 \cdot 0{,}20}{0{,}349} = \frac{0{,}10}{0{,}349} = 0{,}2865$$

11 En un Instituto hay dos salas de visitas donde los tutores reciben a los padres de los alumnos. Ambas salas están ocupadas simultáneamente el 5% de las ocasiones en que son requeridas, no estándolo ninguna en el 75% de las ocasiones.

Si cuando un tutor va a atender a un padre una de las salas está ocupada, ¿cuál es la probabilidad de que la otra también lo esté?

Consideremos los sucesos A = "sala 1ª ocupada" y B = "sala 2ª ocupada". Debemos calcular

$$P(A\cap B \mid A\cup B)=\frac{P[(A\cap B)\cap(A\cup B)]}{P(A\cup B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(\overline{\overline{A}\cap\overline{B}})}=\frac{P(A\cap B)}{1-P(\overline{A}\cap\overline{B})}=$$

$$=\frac{0{,}05}{1-0{,}75}=\frac{0{,}05}{0{,}25}=0{,}20$$

12 En la construcción de unos determinados edificios pueden aparecer anomalías debidas a dos causas que son independientes:

A: fallos de cimentación, con P(A) = 0'04, y

B: mala calidad de los materiales, con P(B) = 0'03.

a) Calcular la probabilidad de que en un determinado edificio no aparezca ninguna anomalía.
b) Calcular la probabilidad de que aparezcan fallos de cimentación y no de mala calidad de los materiales.
c) Un edificio puede presentar anomalías, con probabilidad $P(A\cup B)$, o no presentar ninguna anomalía, con probabilidad $P(A^C\cap B^C)$. En el primer caso, la probabilidad de que el edificio se desplome es del 80%, mientras que en el segundo es del 5%.
   c1) Calcular la probabilidad de que el edificio se desplome.
   c2) Si el edificio se ha desplomado, ¿cuál es la probabilidad de que se haya producido alguna de las anomalías?

Tenemos que $P(A) = 0{,}04$ y $P(B) = 0{,}03$ y, como son independientes

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)=0{,}0012.$$

Entonces, la probabilidad de que aparezca alguna anomalía es:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}0688\,.$$

a) La probabilidaddde que no ocurra ninguna anomalía es, por tanto,

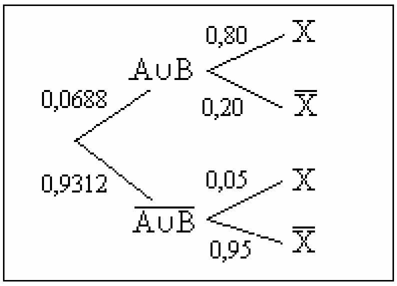
$$P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0{,}0688=0{,}9312$$

(O bien, $P(\overline{A\cup B})=P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0{,}96\cdot 0{,}97=0{,}9312$, ya que si A y B son independientes, también lo son sus contrarios).

b) $P(A \cap \overline{B}) = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}04 - 0{,}0012 = 0{,}0388$.

c) Sea X el suceso “el edificio se desploma”. Según la información,

$$P(X \mid A \cup B) = 0{,}80 \quad \text{y} \quad P(X \mid \overline{A} \cap \overline{B}) = P(X \mid \overline{A \cup B}) = 0{,}05$$



c1) Entonces, por el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que el edificio se desplome es:

$$P(X) = P(A \cup B) \cdot P(X \mid A \cup B) + P(\overline{A \cup B}) \cdot P(X \mid \overline{A \cup B}) =$$
$$= (0{,}0688) \cdot (0{,}80) + (0{,}9312) \cdot (0{,}05) = 0{,}1016 = 10{,}16\%$$

c2) Por el teorema de BAYES,

$$P(A \cup B \mid X) = \frac{P(A \cup B) \cdot P(X \mid A \cup B)}{P(A \cup B) \cdot P(X \mid A \cup B) + P(\overline{A \cup B}) \cdot P(X \mid \overline{A \cup B})} =$$

$$= \frac{(0{,}0688) \cdot (0{,}80)}{0{,}1016} = 0{,}5417 = 54{,}17\%$$