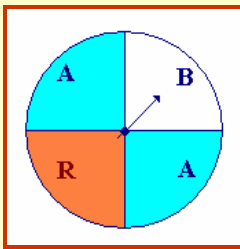


1 Una ruleta está dividida en cuatro sectores de  $90^\circ$  de los que dos opuestos por el vértice son "Azules", y los otros dos son uno "Blanco" y el otro "Rojo". Consideremos el experimento aleatorio consistente en hacer girar la ruleta dos veces y anotar el par ordenado de resultados.

Al cada sector Azul le asignamos  $-50$  puntos, al Blanco  $100$  y al Rojo  $50$ .

Definamos ahora la variable aleatoria  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que a cada suceso elemental le asigna la suma de puntos de sus dos tiradas.



- Construir el espacio muestral,  $\Omega$ , asociado a la experiencia.
- Calcular la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales.
- Determinar el espacio imagen  $\Omega^* = X(\Omega)$ .
- Construir la función de probabilidad imagen de  $X$  (ley de probabilidad de  $X$ ),  $f(x)$ .
- Construir la función de distribución de  $X$ ,  $F(x)$ .
- Calcular  $E(X)$ ,  $\text{Var}(X)$  y  $\text{DT}(X)$ .

a) y b) Sea  $U = \{A, V, R\}$ . El espacio probabilístico asociado al experimento es:

$\Omega = U \times U =$	$\{(A,A),$	$(A,B),$	$(A,R),$	$(B,A),$	$(B,B),$	$(B,R),$	$(R,A),$	$(R,B),$	$(R,R)\}$
$P \downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$R$	$\{1/4,$	$1/8,$	$1/8,$	$1/8$	$1/16$	$1/16$	$1/8$	$1/16$	$1/16$

c) y d) La variable aleatoria  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  queda descrita por:

$\Omega =$	$\{(A,A),$	$(A,R),$	$(R,A),$	$(A,B),$	$(B,A),$	$(R,R),$	$(B,R),$	$(R,B),$	$(B,B)\}$
$X \downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$R \supseteq \Omega^* =$	$\{-100$	$0$	$0$	$50$	$50$	$100$	$150$	$150$	$200\}$

La probabilidad imagen viene dada por:

$$P(X = -100) = P[X^{-1}(-100)] = P[\{(A, A)\}] = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 0) = P[X^{-1}(0)] = P[\{(A, R), (R, A)\}] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 50) = P[X^{-1}(50)] = P[\{(A, B), (B, A)\}] = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

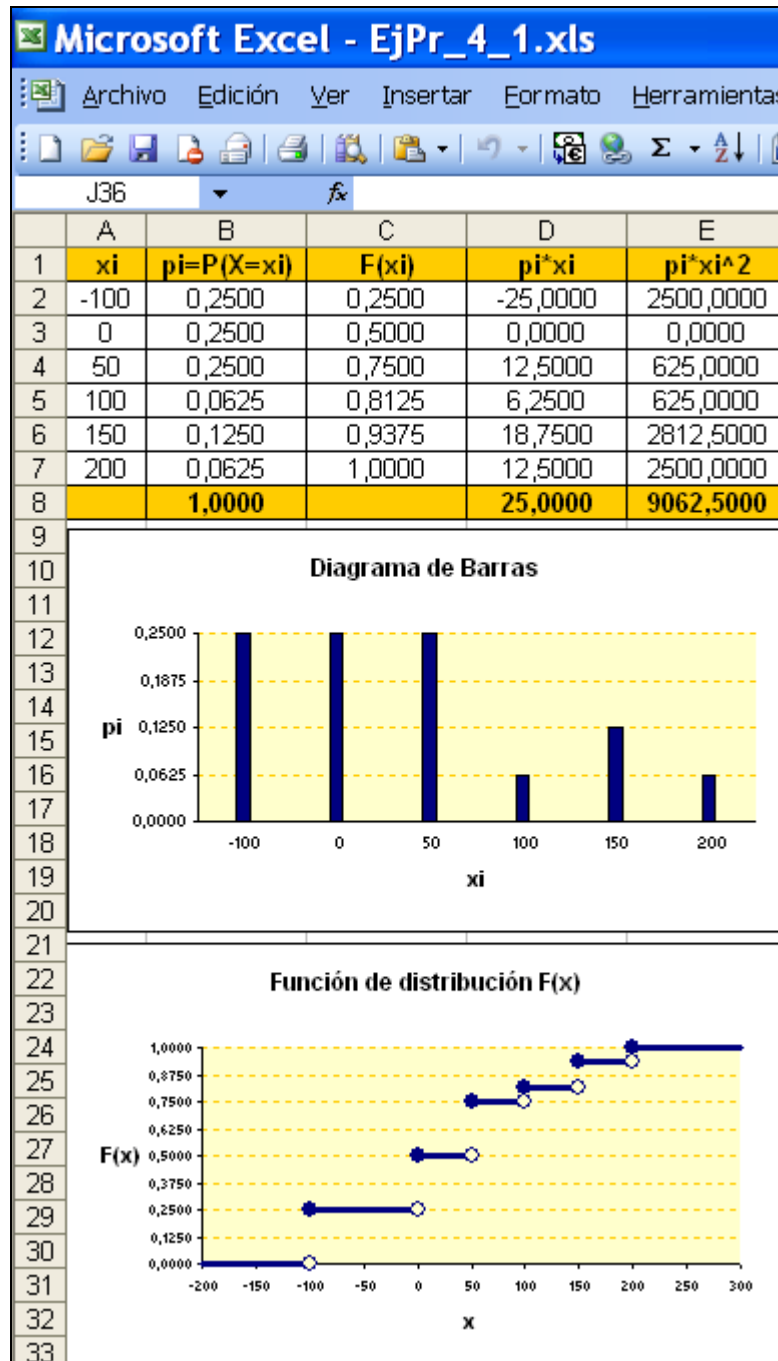
$$P(X = 100) = P[X^{-1}(100)] = P[\{(R, R)\}] = \frac{1}{16}$$

$$P(X = 150) = P[X^{-1}(150)] = P[\{(B, R), (R, B)\}] = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 200) = P[X^{-1}(200)] = P[\{(B, B)\}] = \frac{1}{16}$$

e) Podemos representar la distribución de probabilidades (diagrama de barras) y la función de distribución acumulativa,  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $F(x) = P(X \leq x)$ , con

EXCEL, como hicimos con las correspondientes de una distribución estadística discreta (ver tema 1):



f) 
$$E[X] = \sum_i p_i \cdot x_i = 25$$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \sum_i p_i \cdot x_i^2 - \left( \sum_i p_i \cdot x_i \right)^2 = 9062,5 - 625 = 8437,5$$

$$\sigma = \sqrt{V[X]} = \sqrt{8437,5} = 91,86$$

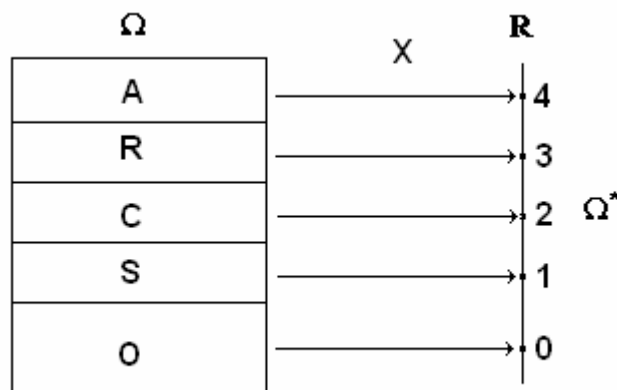
2 Sea  $\Omega$  el espacio muestral de 40 elementos asociado a la extracción de una carta de una baraja española. Si se asignan 4 puntos a cada as, 3 a cada rey, 2 a cada caballo, 1 a cada sota y 0 a cada una de las cartas restantes se tiene una variable aleatoria  $X$ .

- Determinar el espacio imagen  $\Omega^* = X(\Omega)$ .
- Construir la función de probabilidad imagen de  $X$  (ley de prob. de  $X$ ).
- Construir la función de distribución de  $X$ .
- Calcular  $E(X)$ ,  $\text{Var}(X)$  y  $\text{DT}(X)$ .

a) El espacio muestral asociado al experimento es  $\Omega = A \cup R \cup C \cup S \cup O$ , donde A, R, C, S y O son el conjunto de ases, reyes, caballos, sotas y otras, respectivamente, con  $P(x) = 1/40$  para cada  $x \in \Omega$ . La variable aleatoria  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  queda descrita por:

$$\forall x \in \Omega, \quad x \mapsto X(x) = \begin{cases} 4, & \text{si } x \in A \\ 3, & \text{si } x \in R \\ 2, & \text{si } x \in C \\ 1, & \text{si } x \in S \\ 0, & \text{si } x \in O \end{cases}$$

El espacio muestral imagen es  $\Omega^* = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ :



b) La probabilidad imagen queda determinada por:

$$P^*(4) = P(X = 4) = P[X^{-1}(4)] = P[A] = \frac{4}{40}$$

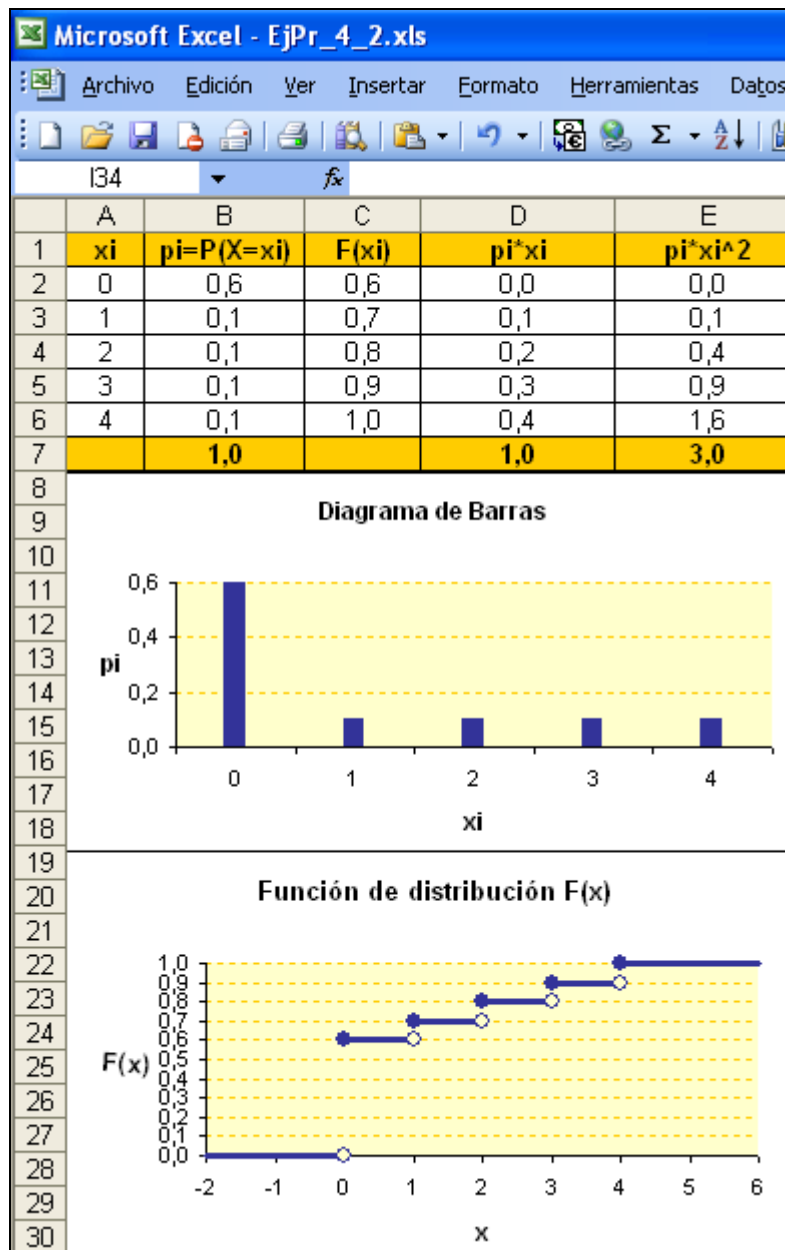
$$P^*(3) = P(X = 3) = P[X^{-1}(3)] = P[R] = \frac{4}{40}$$

$$P^*(2) = P(X = 2) = P[X^{-1}(2)] = P[C] = \frac{4}{40}$$

$$P^*(1) = P(X = 1) = P[X^{-1}(1)] = P[S] = \frac{4}{40}$$

$$P^*(0) = P(X = 0) = P[X^{-1}(0)] = P[O] = \frac{24}{40}$$

c) Podemos representar la distribución de probabilidades (diagrama de barras) y la función de distribución acumulativa,  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $F(x) = P(X \leq x)$ , con EXCEL, como en el ejercicio anterior:



$$d) \quad E[X] = \sum_i p_i \cdot x_i = 1$$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \sum_i p_i \cdot x_i^2 - \left( \sum_i p_i \cdot x_i \right)^2 = 3 - 1 = 2$$

$$\sigma = \sqrt{V[X]} = \sqrt{2} = 1,4142$$

3 Sea  $X$  una variable aleatoria que toma los valores 0, 1 y 2 con probabilidades 0,3, 0,5 y  $p$ , respectivamente.

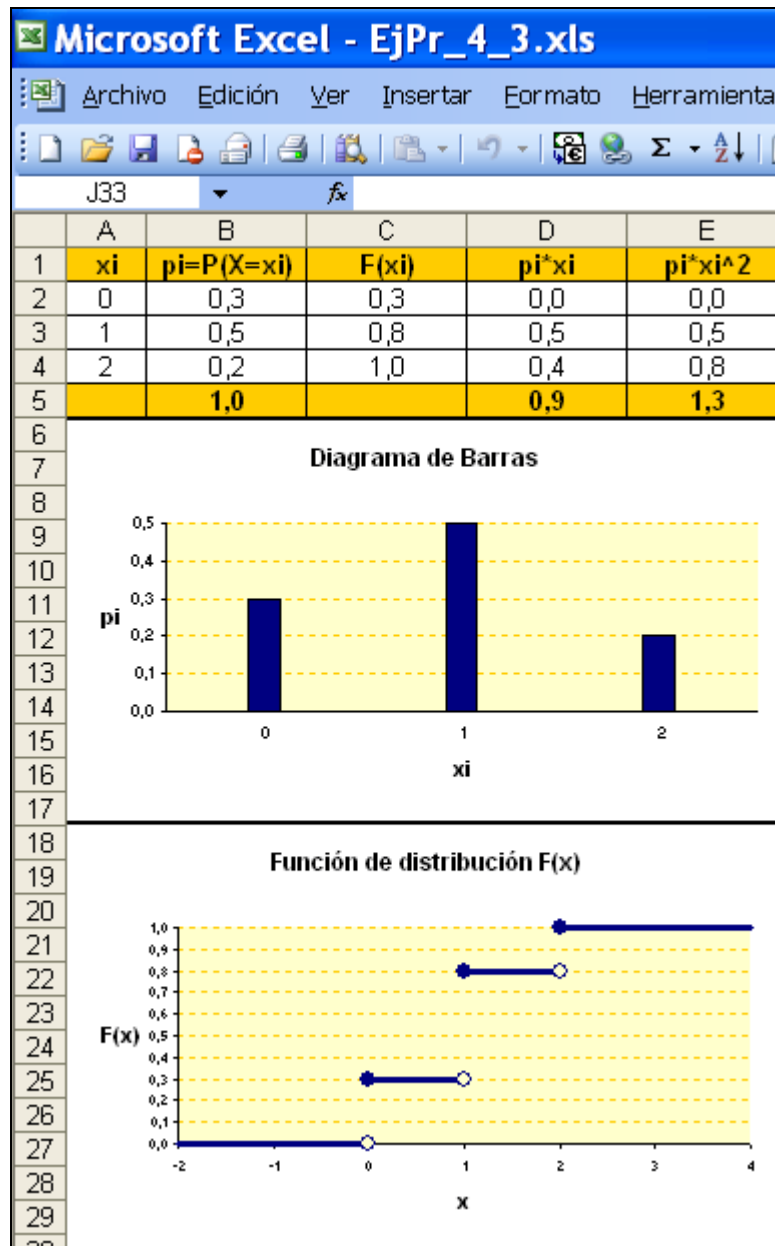
- Calcular el valor de  $p$ .
- Calcular la esperanza matemática y la varianza de  $X$ .
- Definir y representar la función de distribución,  $F(x)$ .

a)  $X: \Omega \rightarrow \Omega^* = \{0, 1, 2\}$ , con  $P(X=0) = 0,3$ ,  $P(X=1) = 0,5$  y  $P(X=2) = 1 - (0,3 + 0,5) = 0,2$ .

b)  $E[X] = \sum_i p_i \cdot x_i = 0,9$ ;  $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 1,3 - (0,9)^2 = 0,49$

$$\sigma = \sqrt{V[X]} = \sqrt{0,49} = 0,7$$

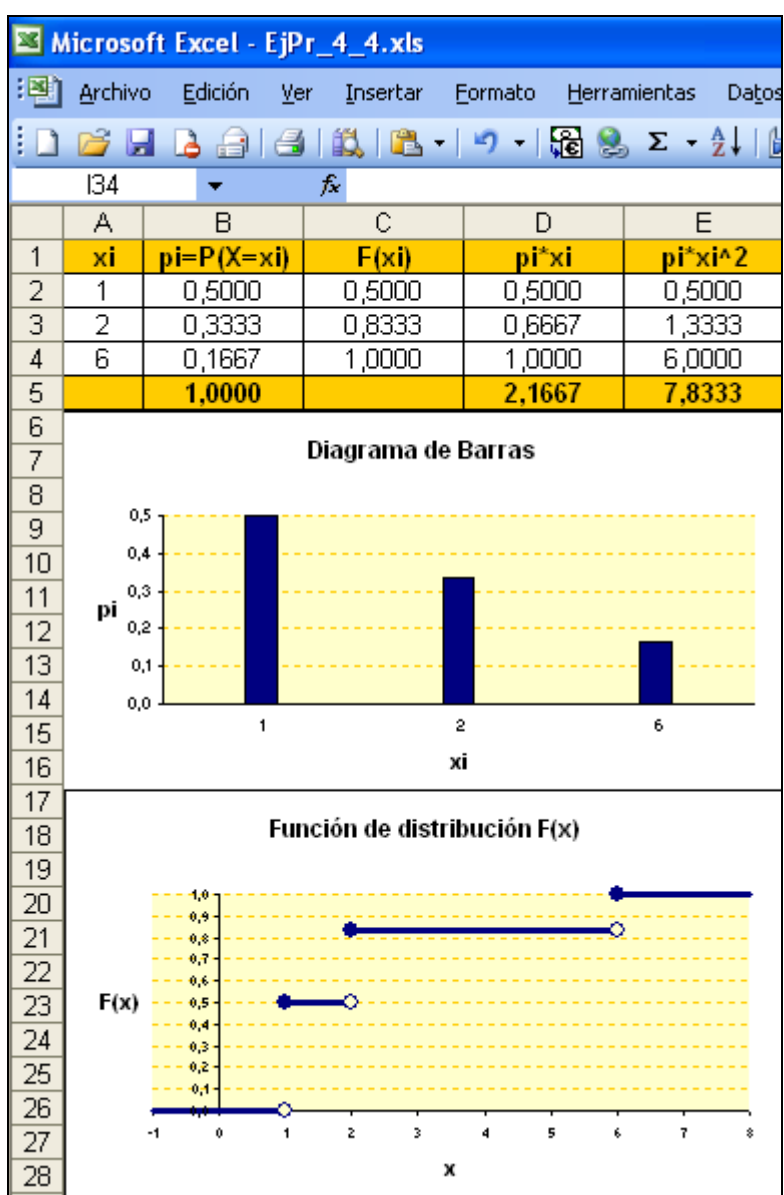
c)



4 Se lanza un dado cúbico del que tres caras están marcadas con 1, dos caras con 2 y una cara con 6.

- Después de lanzar el dado se anota la puntuación aparecida. Se designa por  $X$  la variable aleatoria que a cada jugada le asocia esa puntuación. Construir el espacio probabilístico imagen de  $X$ . Representar la función de probabilidad y la función de distribución acumulativa de  $X$ .
- Se lanza el dado dos veces y se designa por  $Z$  la variable aleatoria que a cada par ordenado de puntuaciones le asigna la suma de puntos. Representar la función de probabilidad y la función de distribución acumulativa de  $Z$ .

a) El espacio muestral del experimento es  $\Omega = \{1,2,6\}$  y el espacio probabilístico imagen es  $\Omega^* = \{1,2,6\}$ , ya que la variable aleatoria  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es la función identidad sobre  $\Omega$ :  $X(1)=1, X(2)=2$  y  $X(3)=3$ . Entonces,  $P(X=1) = 3/6, P(X=2) = 2/6$  y  $P(X=3)=1/6$ .



Los parámetros estadísticos usuales son:

$$E[X] = \sum_i p_i \cdot x_i = \frac{13}{6} = 2,1667 ;$$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{282}{36} - \frac{169}{36} = \frac{113}{36} = 3,1389 ;$$

$$\sigma = \sqrt{V[X]} = \sqrt{3,1389} = 1,7717$$

b) El espacio muestral del experimento es ahora el producto cartesiano  $\Omega^2 = \Omega \times \Omega = \{(1,1), (1,2), (1,6), (2,1), (2,2), (2,6), (6,1), (6,2), (6,6)\}$ , con  $P(i,j)=P(i) \cdot P(j)$ , por independencia.

El espacio probabilístico imagen de la v.a. Z es  $\Omega^* = \{2,3,4,7,8,12\}$ .

La probabilidad imagen viene dada por:

$$P(Z = 2) = P[Z^{-1}(2)] = P[\{(1,1)\}] = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36}$$

$$P(Z = 3) = P[Z^{-1}(3)] = P[\{(1,2), (2,1)\}] = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{36}$$

$$P(Z = 4) = P[Z^{-1}(4)] = P[\{(2,2)\}] = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{36}$$

$$P(Z = 7) = P[Z^{-1}(7)] = P[\{(1,6), (6,1)\}] = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{6}{36}$$

$$P(Z = 8) = P[Z^{-1}(8)] = P[\{(2,6), (6,2)\}] = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{36}$$

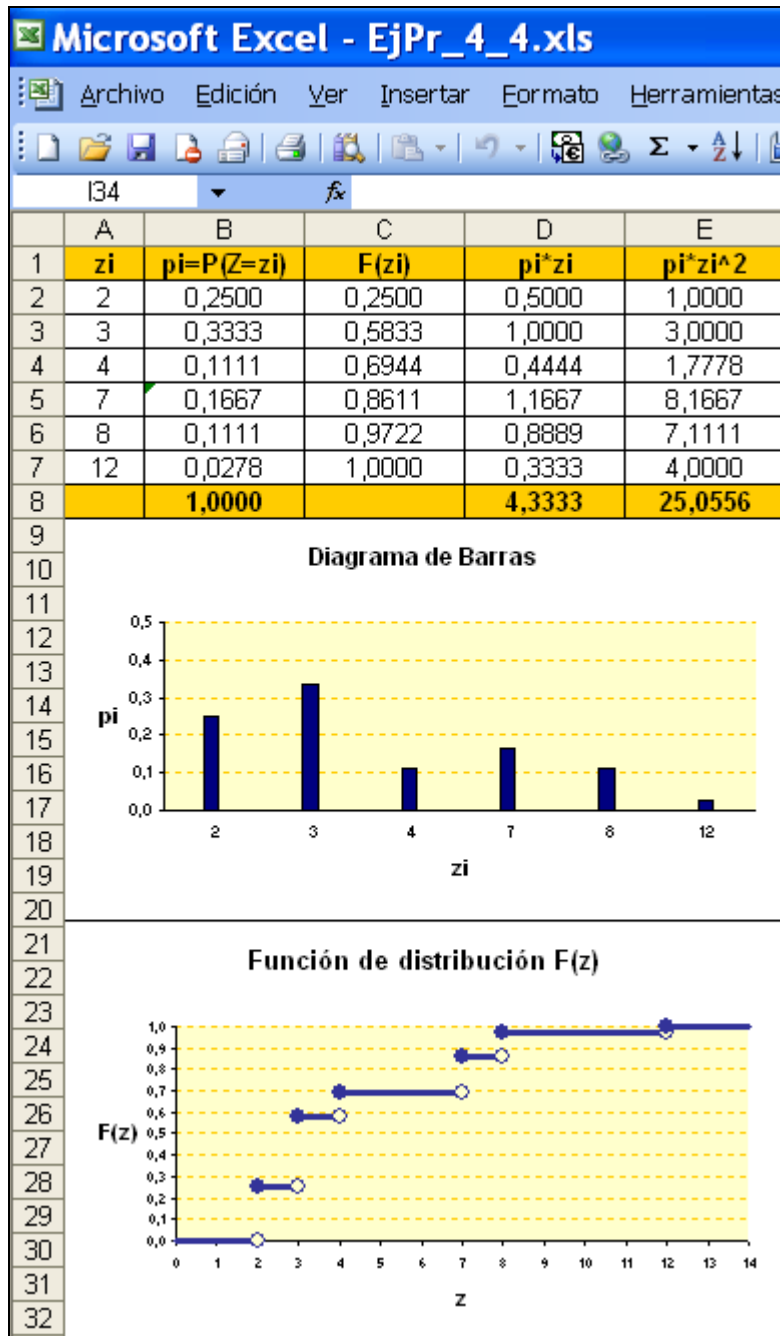
$$P(Z = 12) = P[Z^{-1}(12)] = P[\{(6,6)\}] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Los estadísticos usuales son:

$$E[X] = \sum_i p_i \cdot x_i = 4,3333 ;$$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 6,2777 ;$$

$$\sigma = \sqrt{V[X]} = \sqrt{6,2777} = 2,5055$$



5 La función de distribución acumulativa  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de una variable aleatoria  $X$

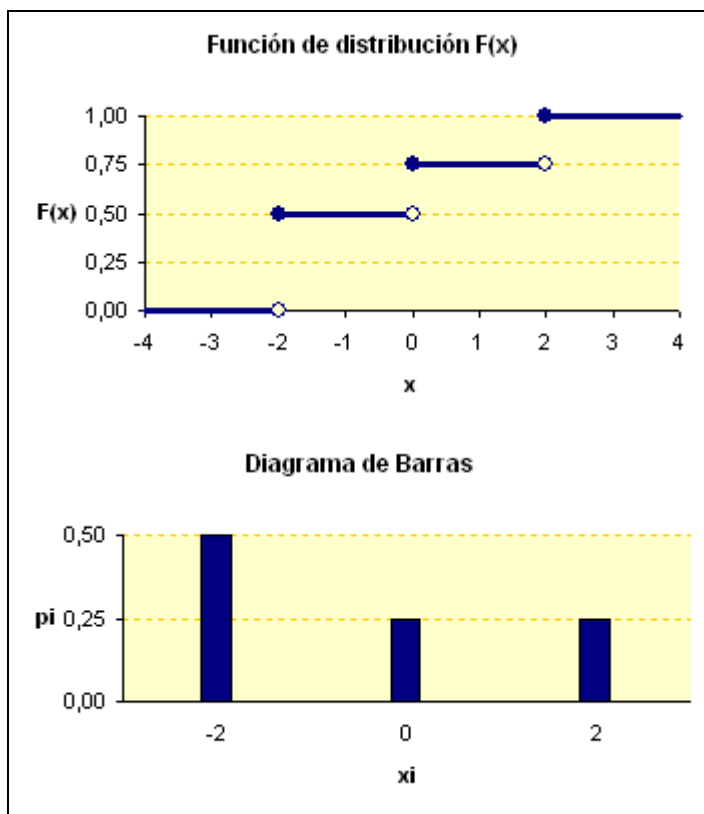
viene definida por:

$$x \mapsto F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -2, \\ 1/2, & \text{si } -2 \leq x < 0, \\ 3/4, & \text{si } 0 \leq x < 2, \\ 1, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

- Dibujar la gráfica de  $F$ .
- Describir la función de probabilidad de  $X$  y representarla mediante un diagrama de barras.
- Calcular las siguientes probabilidades:  $P(X = 1)$ ,  $P(X \leq 1)$ ,  $P(X < 1)$ ,  $P(X = 2)$ ,  $P(X \leq 2)$ ,  $P(0 < X < 2)$ ,  $P(0 < X \leq 2)$ ,  $P(1 \leq X \leq 2)$ .

Una vez representada la función de distribución, sabemos que las probabilidades de los valores discretos de  $x$  son los saltos de dicha función escalonada. Es decir:

$x_i$	-2	0	2
$p_i = P(X = x_i)$	1/2	1/4	1/4



La función de probabilidad  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  viene definida por:

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1/2, & \text{si } x = -2 \\ 1/4, & \text{si } x = 0 \\ 1/4, & \text{si } x = 2 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora:

$$P(X = 1) = 0$$

$$P(X \leq 1) = F(1) = \frac{3}{4} \quad (\text{Tambi3n } P(X \leq 1) = P(X = -2) + P(X = 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4})$$

$$P(X < 1) = P(X \leq 0) = F(0) = \frac{3}{4}$$

$$P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

$$P(X \leq 2) = F(2) = 1$$

$$P(0 < X < 2) = 0$$

$$P(0 < X \leq 2) = F(2) - F(0) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \quad (\text{Tambi3n } P(0 < X \leq 2) = P(X = 2) = \frac{1}{4})$$

$$P(1 \leq X \leq 2) = P(X = 1) + P(1 < X \leq 2) = 0 + F(2) - F(1) = 0 + 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$
$$(\text{Tambi3n } P(1 \leq X \leq 2) = P(X = 2) = \frac{1}{4})$$

6 La función de probabilidad de una variable aleatoria  $X$  es nula salvo en los puntos  $x \in \{0, 1, 2\}$ , en los que toma los valores

$$P(X=0) = 3c^3, \quad P(X=1) = 4c - 10c^2, \quad P(X=2) = 5c - 1,$$

para un cierto  $c > 0$ .

- Calcular el valor de  $c$ .
- Describir y representar la función de distribución acumulativa,  $F$ .
- Calcular las probabilidades  $P(X < 1)$ ,  $P(X \leq 2)$ ,  $P(1 < X \leq 2)$ ,  $P(0 < X < 3)$ .
- Hallar (si es que existe) el mayor valor de  $x$  tal que  $F(x) < \frac{1}{2}$ .
- Hallar (si es que existe) el menor valor de  $x$  tal que  $F(x) > \frac{1}{3}$ .

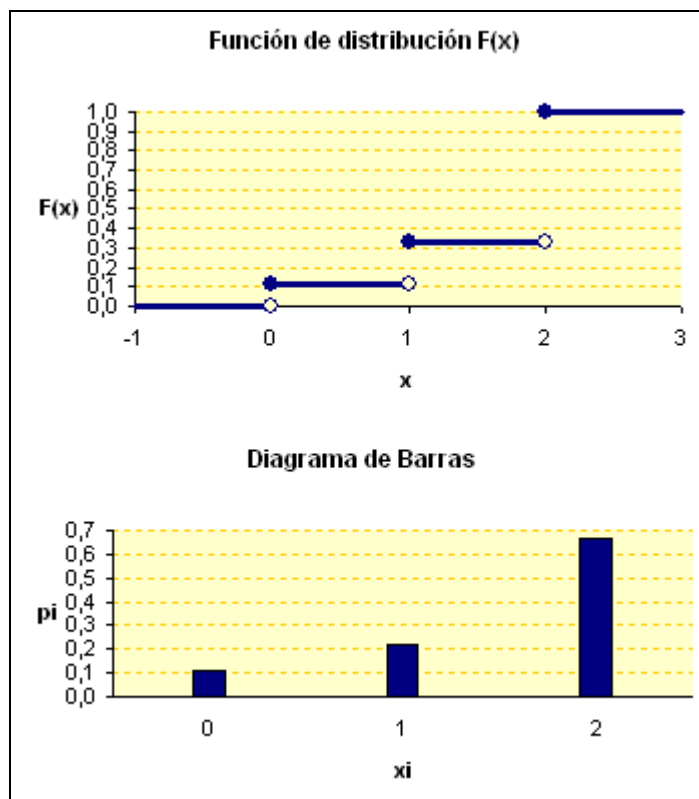
a) Puesto que  $p_0 + p_1 + p_2 = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1$ , se tiene que  $3c^3 + (4c - 10c^2) + (5c - 1) = 1 \Rightarrow 3c^3 - 10c^2 + 9c - 2 = 0 \Rightarrow (c-1)(c-2)(3c-1) = 0$

Las soluciones de la ecuación anterior son  $c=1, c=2$  y  $c=\frac{1}{3}$ . Las dos primeras no son

solución de nuestro problema, pues sería  $P(X=0) > 1$ . Así, ha de ser  $c = \frac{1}{3}$ .

Entonces:  $p_0 = \frac{1}{9}, p_1 = \frac{2}{9}$  y  $p_2 = \frac{6}{9}$ .

b) La función de probabilidad y la función de distribución son:



La función de probabilidad  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  viene definida por

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1/9, & \text{si } x=0 \\ 2/9, & \text{si } x=1 \\ 6/9, & \text{si } x=2 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La función de distribución acumulativa  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  viene definida por

$$x \mapsto F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1/9, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1/3, & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 1, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

c)

$$P(X < 1) = P(X = 0) = \frac{1}{9}$$
$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$$
$$P(1 < X \leq 2) = P(X = 2) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$
$$P(0 < X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{9} + \frac{6}{9} = \frac{8}{9}$$

d) Observando la definición o la gráfica de  $F(x)$ , vemos que para todo  $x$  del intervalo  $]-\infty, 2[$  es  $F(x) < \frac{1}{2}$ , luego el valor pedido no existe: dicho intervalo no tiene máximo.

e) Análogamente, observamos que para todo  $x$  del intervalo  $[1, +\infty[$  es  $F(x) > \frac{1}{3}$ . Ahora, este intervalo sí tiene un mínimo, 1, que es el valor pedido.

7 De una variable aleatoria  $X$  cuyos valores posibles son  $1, 2, 3, \dots, n$ , se sabe que  $P(X=k)$  es proporcional a  $k$  (esto es, existe un  $\alpha$  tal que  $P(X=k) = \alpha \cdot k$ ). Determinar la constante de proporcionalidad,  $\alpha$ , la función de probabilidad,  $f$ , y la función de distribución,  $F$ . *(Recuérdese que  $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ ).*

Como  $\sum_{k=1}^n P(X=k) = 1$ , ha de ser  $\sum_{k=1}^n \alpha \cdot k = 1$ , luego  $\alpha \cdot \sum_{k=1}^n k = 1$ . Teniendo en cuenta la fórmula de la suma de los  $n$  primeros naturales, se tiene que  $\alpha \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 1$ , luego

$$\alpha = \frac{2}{n \cdot (n+1)}.$$

Así,  $p_k = P(X=k) = \frac{2k}{n(n+1)}$ .

La función de probabilidad  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  viene definida por

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} P(X=x) = \frac{2x}{n(n+1)}, & \text{si } x \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función de distribución acumulativa  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  viene definida por

$$x \mapsto F(x) = P(X \leq x) = \sum_{k \leq x} P(X=k)$$

Es decir

$x \in ]-\infty, 1[ \dots \dots \dots F(x) = 0$

$x \in [ 1, 2[ \dots \dots \dots F(x) = F(1) = P(X=1) = \frac{2}{n(n+1)}$

$x \in [ 2, 3[ \dots \dots \dots F(x) = F(2) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{2}{n(n+1)} + \frac{4}{n(n+1)} = \frac{6}{n(n+1)}$

.....

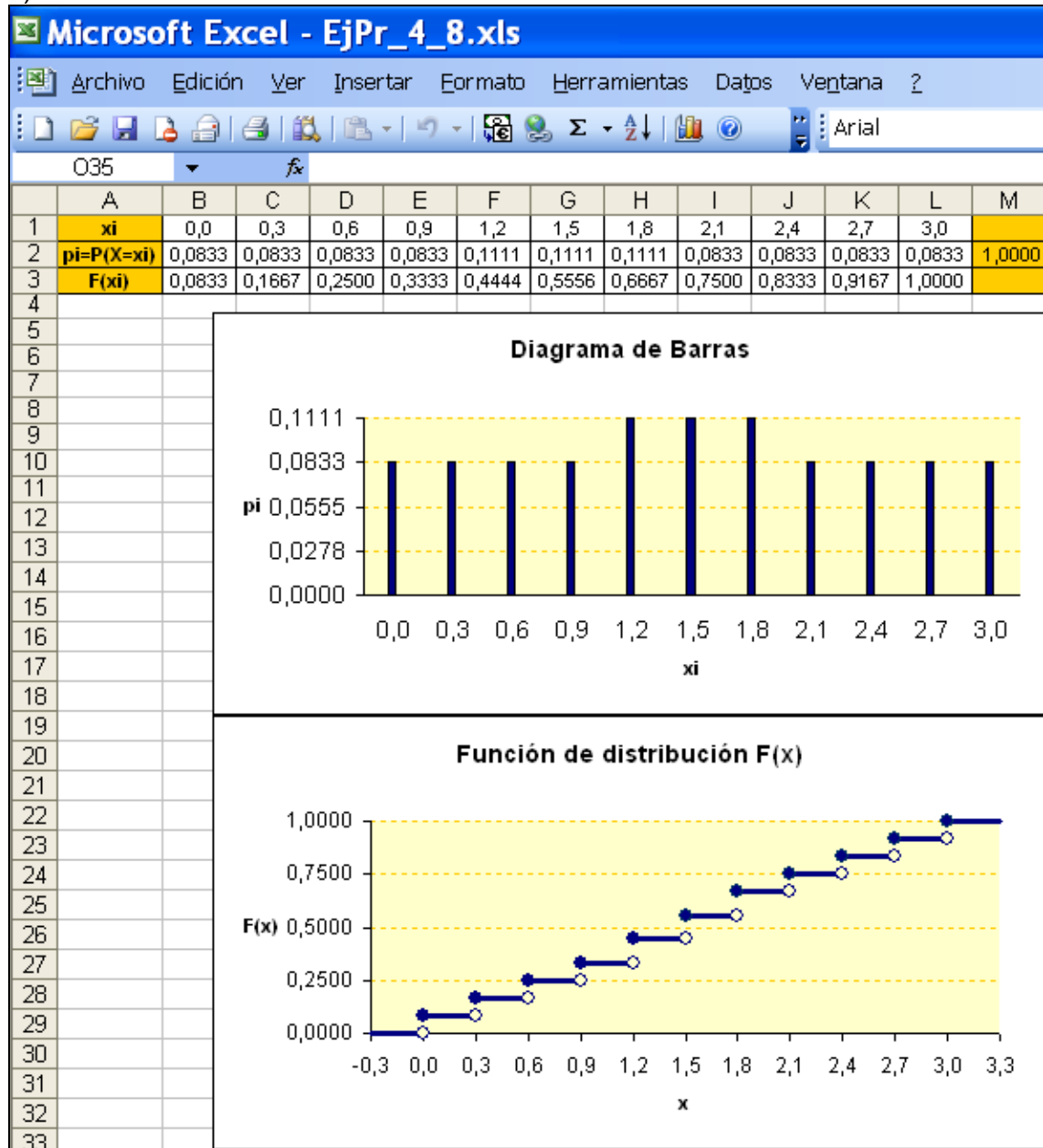
$x \in [n, +\infty[ \dots \dots \dots F(x) = F(n) = P(X=1) + P(X=2) + \dots + P(X=n) = 1$

8 Se sabe que el número de minutos,  $x$ , que uno tiene que esperar un tren en cierta estación del metro es una variable aleatoria discreta,  $X$ , con la siguiente función

$$\text{de probabilidad: } x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 3k/10 \text{ para } k \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}, \\ 1/12, & \text{si } x \in \{0; 0'3; 0'6; 0'9; 2'1; 2'4; 2'7; 3'0\}, \\ 1/9, & \text{si } x \in \{1'2; 1'5; 1'8\}. \end{cases}$$

- Representar  $f$  por un diagrama de barras y dibujar la gráfica de la correspondiente función de distribución,  $F$ .
- Sea  $A$  el suceso consistente en que uno tiene que esperar un tiempo  $x \in [0, 2]$  y sea  $B$  el suceso consistente en que uno tiene que esperar un tiempo  $x \in [1, 3]$ . Calcular las probabilidades  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(A \cap B)$ ,  $P(A|B)$  y  $P(A \cup B)$ .

a)



b)

$$P(A) = P(x \in [0,2]) = P(0) + P(0,3) + P(0,6) + P(0,9) + P(1,2) + P(1,5) + P(1,8) = \frac{2}{3}$$

$$P(B) = P(x \in [1,3]) = P(1,2) + P(1,5) + P(1,8) + P(2,1) + P(2,3) + P(2,7) + P(3) = \frac{2}{3}$$

$$P(A \cap B) = P(x \in [1,2]) = P(1,2) + P(1,5) + P(1,8) = \frac{1}{3}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \quad (P(A \cup B) = P(\Omega^*) = 1)$$

