LA DISTRIBUCIÓN NORMAL EN EXCEL

Sea $X \sim N(\mu;\ \sigma)$ una v.a. normal de media μ y desviación típica σ, con función de densidad $f_{\mu;\sigma}(x)$ y función de distribución acumulativa $F_{\mu;\sigma}(x) = P(X \le x) = P(X < x)$, entonces $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0;\ 1)$ es una v.a. normal tipificada de media 0 y desviación típica 1, con función de densidad $\varphi(z)$ y función de distribución acumulativa $\Phi(z) = P(Z \le z) = P(Z < z)$.

En relación con la distribución normal, EXCEL emplea cuatro funciones cuya sintaxis y significado es el siguiente:

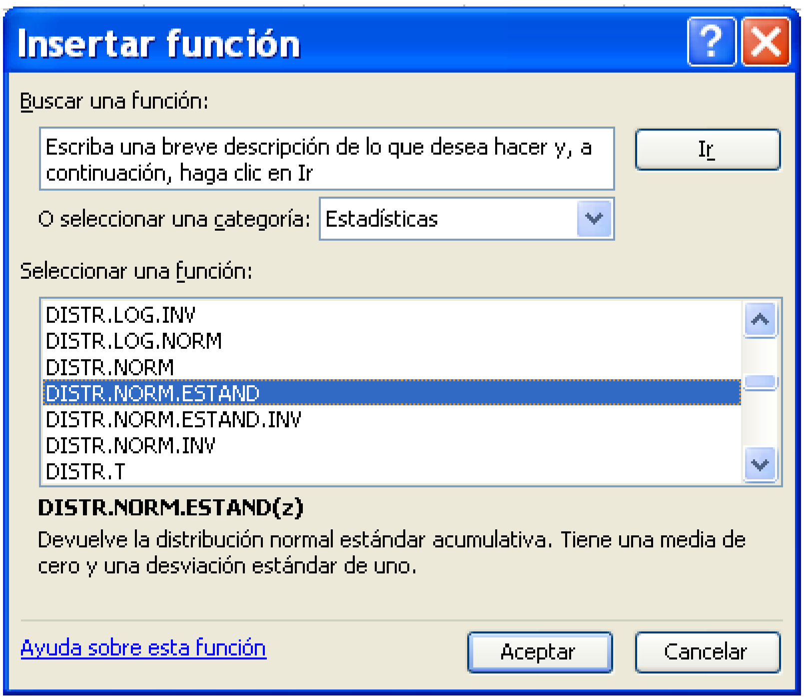
=DISTR.NORM.ESTAND(z): $\Phi(z) = P(Z \le z) = p$

=DISTR.NORM.ESTAND.INV(p): $\Phi^{-1}(p) = z$

=DISTR.NORM(x;μ;σ;acum): $f_{\mu;\sigma}(x)$, si acum es FALSO,
$F_{\mu;\sigma}(x) = P(X \le x) = p$, si acum es VERDADERO

=DISTR.NORM.INV(p;μ;σ): $F^{-1}{}_{\mu;\sigma}(p) = x$

Se inserta la función adecuada como ya sabemos:



1 Sea X una variable aleatoria que sigue una ley normal N(μ; σ) y sea Φ la función de distribución de la normal tipificada N(0; 1). Si $\delta > 0$, encontrar una fórmula que permita calcular la probabilidad de que los valores de X se desvíen de μ, en valor absoluto, menos de δ: P(|X – μ|<δ). Aplicarla al caso en que μ = 20, σ = 10 y δ = 3.

Si $X \sim$ N(μ; σ), entonces $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ ~N(0; 1). Así, si $\delta > 0$,

$$P(|X-\mu|<\delta) = P(-\delta < X-\mu < \delta) = P\left(\frac{-\delta}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{\delta}{\sigma}\right) = P\left(\frac{-\delta}{\sigma} < Z < \frac{\delta}{\sigma}\right) =$$

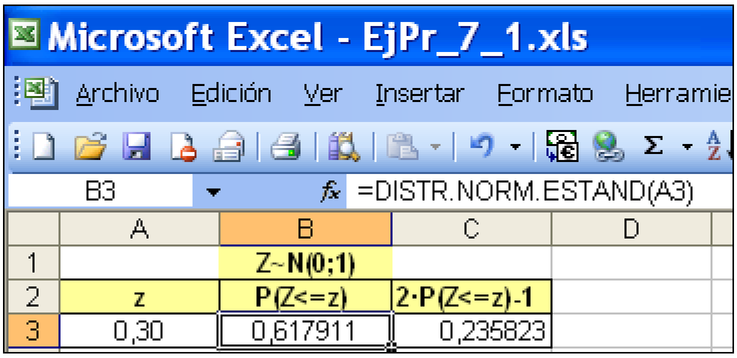
$$= P\left(Z < \frac{\delta}{\sigma}\right) - P\left(Z < -\frac{\delta}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{\delta}{\sigma}\right) - P\left(Z > \frac{\delta}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{\delta}{\sigma}\right) - \left[1 - P\left(Z \le \frac{\delta}{\sigma}\right)\right] =$$

$$= 2 \cdot P\left(Z < \frac{\delta}{\sigma}\right) - 1 = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - 1$$

$$P(|X-20|<3) = 2\cdot\Phi\left(\frac{3}{10}\right) - 1 = 2\cdot\Phi(0{,}30) - 1 = 2\cdot 0{,}6179 - 1 = 0{,}2358$$

Podemos utilizar las tablas usuales de la función de distribución acumulativa de la N(0;1) o bien utilizar la librería de funciones estadísticas de EXCEL:

El resultado es:

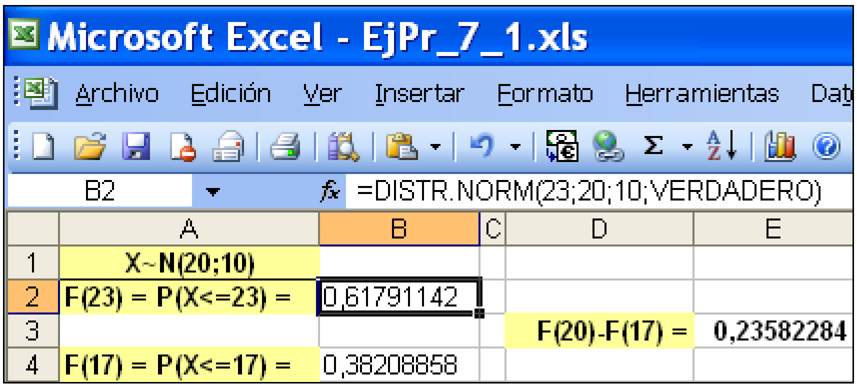


	A	B	C	D
1		Z~N(0;1)		
2	z	P(Z<=z)	2·P(Z<=z)-1	
3	0,30	0,617911	0,235823	

Para la aplicación numérica, con X~N(μ=20; σ=10) y δ=3, podemos utilizar EXCEL sin tipificar la variable:

$$P(|X-\mu|<\delta) = P(-\delta < X-\mu < \delta) = P(\mu-\delta < X < \mu+\delta) =$$

$$= P(X < \mu+\delta) - P(X < \mu-\delta) = F(23) - F(17) = 0{,}6179 - 0{,}3821 = 0{,}2358$$



	A	B	C	D	E
1	X~N(20;10)				
2	F(23) = P(X<=23) =	0,61791142			
3				F(20)-F(17) =	0,23582284
4	F(17) = P(X<=17) =	0,38208858			

2 Sea φ la función de densidad de una distribución normal N(0; σ). Representar gráficamente φ para σ = 1, σ = 3 y σ = 7,5. Para ello, determinar en cada caso las coordenadas del máximo y de los puntos de inflexión.

La función de densidad de una distribución N(μ; σ) es $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, y alcanza su único máximo en el punto de abscisa $x=\mu$, siendo

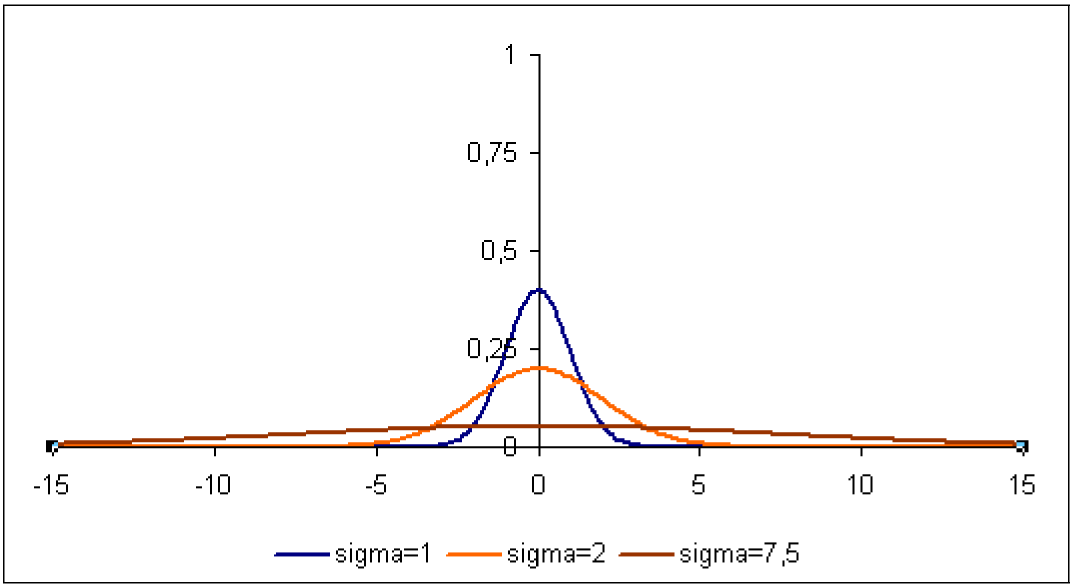
$$f_{máx}=f(\mu)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Tiene dos puntos de inflexión de abscisas $x=\mu-\sigma$ y $x=\mu+\sigma$. Por simetría de la gráfica de f respecto a la recta $x=\mu$, la ordenada de ambos puntos es la misma:

$$f(\mu-\sigma)=f(\mu+\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\,e}}$$

Para μ = 0, se tiene:

	Máximo		**Inflexiones**			
σ	x	y	x'	y'	x''	y''
1	0	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	-1	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\,e}}$	$+1$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\,e}}$
2	0	$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$	-2	$\frac{1}{2\sqrt{2\pi\,e}}$	$+2$	$\frac{1}{2\sqrt{2\pi\,e}}$
7,5	0	$\frac{1}{7{,}5\sqrt{2\pi}}$	$-7{,}5$	$\frac{1}{7{,}5\sqrt{2\pi\,e}}$	$+7{,}5$	$\frac{1}{7{,}5\sqrt{2\pi\,e}}$



A medida que aumenta la desviación típica, disminuye la concentración en torno a la media y la gráfica se hace más “aplastada” (“platicúrtica”).

3 Una variable aleatoria Z sigue una distribución normal tipificada N(0; 1) con función de distribución Φ. Justificar: a) Φ(–z) = 1 – Φ(z); b) P(|Z| < k) = 2·Φ(k) – 1; c) P(|Z| > k)=2·[1 – Φ(k)].

a) Por simetría, $\Phi(-z)=P(Z\le -z)=P(Z\ge z)=1-P(Z<z)=1-\Phi(z)$

b) $P(|Z|<k)=P(-k<Z<k)=P(Z<k)-P(Z<-k)=\Phi(k)-\Phi(-k)=$
$=\Phi(k)-[1-\Phi(k)]=2\cdot\Phi(k)-1$

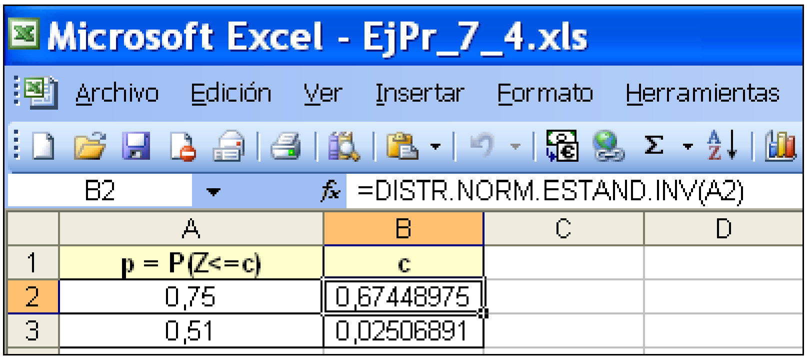
c) $P(|Z|>k)=1-P(|Z|\le k)=1-[2\cdot\Phi(k)-1]=2\cdot[1-\Phi(k)]$

4 Una variable aleatoria Z sigue una distribución normal tipificada N(0; 1) con función de distribución Φ. Encontrar un número real c tal que: a) P(|Z| > c) = 1/2; b) P(|Z| > c) = 0,98.

a) $P(|Z|>c)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\cdot[1-\Phi(c)]=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \Phi(c)=P(Z\le c)=\frac{3}{4}$

b) $P(|Z|>c)=0{,}98\Leftrightarrow 2\cdot[1-\Phi(c)]=0{,}98\Leftrightarrow \Phi(c)=P(Z\le c)=0{,}51$

Empleando DISTR.NORM.ESTAND.INV(z) se obtiene:


Microsoft Excel - EjPr_7_4.xls
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas
B2 =DISTR.NORM.ESTAND.INV(A2)

	A	B	C	D
1	p = P(Z<=c)	c		
2	0,75	0,67448975		
3	0,51	0,02506891		

5 Una variable aleatoria X sigue una distribución normal N(μ; σ) con función de distribución F.
a) Probar que F(x)=Φ[(x –μ)/σ]
b) Encontrar un número real c tal que P(|X–μ| > c) = 1/2.
c) Encontrar un número real c tal que P(|X–μ| > c) = 0,98.

Sea X ~ N(μ; σ), con función de distribución acumulativa F(x)=P(X≤x). Entonces $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$~N(0; 1).

a) $F(x)=P(X\le x)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{x-\mu}{\sigma})=P(Z\le\frac{x-\mu}{\sigma})=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

b) $P(|X-\mu|>c)=P[(X-\mu<-c)\dot{\cup}(X-\mu>c)]=$

$$=P(X-\mu<-c)+P(X-\mu>c)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{-c}{\sigma})+P(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{c}{\sigma})=$$

$$=P(Z<\frac{-c}{\sigma})+P(Z>\frac{c}{\sigma})=2\cdot P(Z>\frac{c}{\sigma})=2\cdot\left[1-P(Z\le\frac{c}{\sigma}\right]=2\cdot\left[1-\Phi(\frac{c}{\sigma})\right]$$

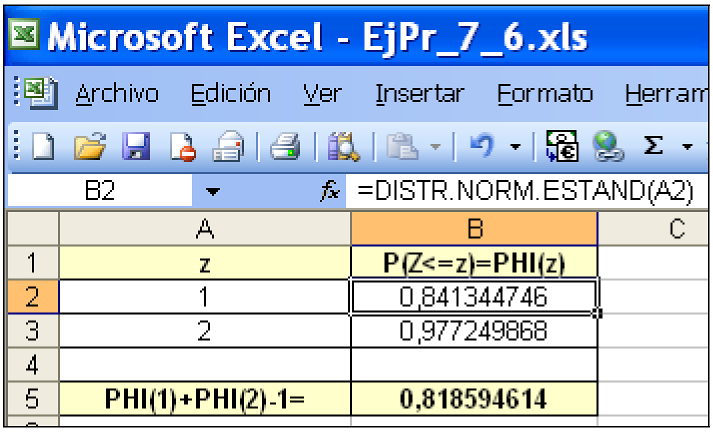
Si ha de ser $2\cdot\left[1-\Phi(\frac{c}{\sigma})\right]=\frac{1}{2}$ entonces $\Phi(\frac{c}{\sigma})=\frac{3}{4}=0{,}75$. Según el ejercicio anterior: $\frac{c}{\sigma}=0{,}6745\Rightarrow c=0{,}6745\cdot\sigma$

c) Ahora $2\cdot\left[1-\Phi(\frac{c}{\sigma})\right]=0{,}98\Leftrightarrow\Phi(\frac{c}{\sigma})=0{,}51$, luego $\frac{c}{\sigma}=0{,}0251\Rightarrow c=0{,}0251\cdot\sigma$

6 Una variable aleatoria X sigue una distribución normal N(μ = 1; σ^2 = 4). Calcular cada una de las probabilidades siguientes: a) P(–3 ≤ X <3); b) P(–5 < X ≤ 3).

a) $P(-3\le X\le 3)=P\left(\frac{-3-1}{2}\le\frac{X-1}{2}\le\frac{3-1}{2}\right)=P(-2\le Z\le 1)=\Phi(1)-\Phi(-2)=$

$$=\Phi(1)-[1-\Phi(2)]=\Phi(1)+\Phi(2)-1=$$



Microsoft Excel - EjPr_7_6.xls

Archivo Edición Ver Insertar Formato Herram

B2 =DISTR.NORM.ESTAND(A2)

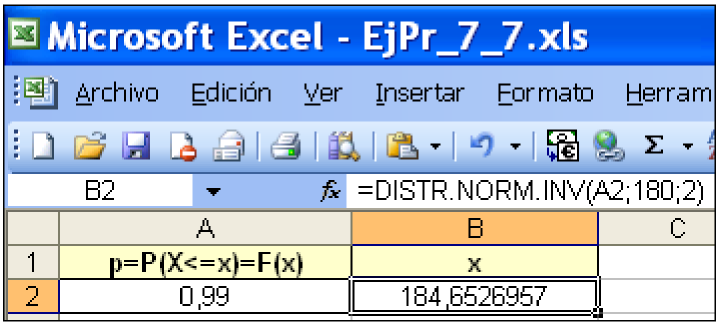
	A	B	C
1	z	P(Z<=z)=PHI(z)	
2	1	0,841344746	
3	2	0,977249868	
4			
5	PHI(1)+PHI(2)-1=	0,818594614	

b) $P(-5\le X\le 3)=P\left(\frac{-5-1}{2}\le\frac{X-1}{2}\le\frac{3-1}{2}\right)=P(-3\le Z\le 1)=\Phi(1)-\Phi(-3)=$

$$=\Phi(1)-[1-\Phi(3)]=\Phi(1)+\Phi(3)-1=0{,}839994777$$

7 Un arquitecto está diseñando un portal de un edificio que tienen que utilizar personas cuya estatura está distribuida normalmente con media 180 cm y varianza 4 cm^2. ¿Qué altura mínima debe dar al portal para que no más del 1% de las personas choquen con su cabeza en la parte superior del mismo?

La estatura, X, sigue una N(μ = 180 cm; σ = 2 cm). Se trata de hallar el valor mínimo de x tal que $P(X \le x) = 0{,}99$. Lo podemos hacer sin tipificar X:


Microsoft Excel - EjPr_7_7.xls

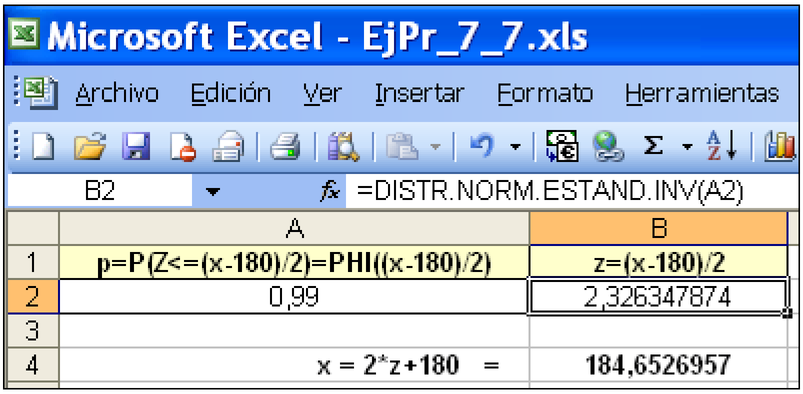
B2 =DISTR.NORM.INV(A2;180;2)

	A	B	C
1	p=P(X<=x)=F(x)	x	
2	0,99	184,6526957	

Puede ser interesante hacerlo mediante tipificación, como es usual cuando no se emplean hojas de cálculo:

$$P(X \le x) = 0{,}99 \Leftrightarrow P\left(\frac{X-180}{2} \le \frac{x-180}{2}\right) = 0{,}99 \Leftrightarrow P\left(Z \le \frac{x-180}{2}\right) = 0{,}99$$

De $\frac{x-180}{2} = 2{,}3263$ se sigue que $x = 184{,}65\ cm$.


Microsoft Excel - EjPr_7_7.xls

B2 =DISTR.NORM.ESTAND.INV(A2)

	A	B
1	p=P(Z<=(x-180)/2)=PHI((x-180)/2)	z=(x-180)/2
2	0,99	2,326347874
3		
4	x = 2*z+180 =	184,6526957

8 Los errores cometidos por una máquina al medir la longitud de unos tornillos se distribuyen normalmente con media 0 cm y desviación típica 1 cm. Un tornillo se considera **bueno** si el error en la medición está comprendido entre –0,1 y 0,1, **defectuoso** si el error es menor que –1,02, y **recuperable** si el error es mayor que 1,34. Calcular

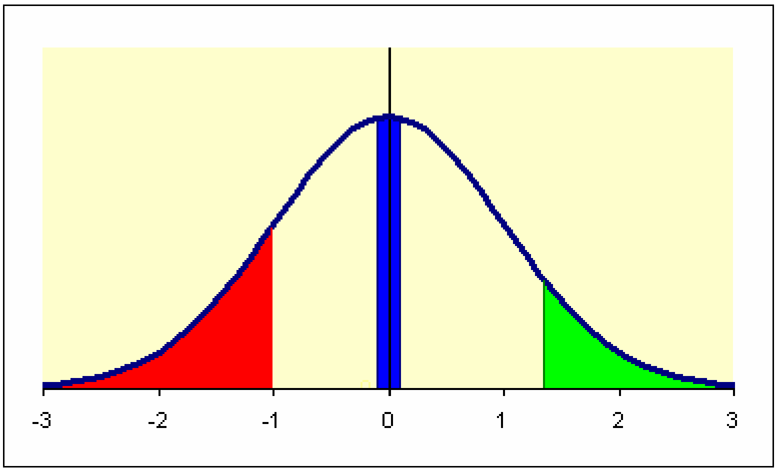
a) la probabilidad de que un tornillo sea considerado bueno;
b) la probabilidad de que un tornillo sea considerado defectuoso; y
c) la probabilidad de que un tornillo sea considerado recuperable.

Sea Z el error cometido, con Z ~ N(0; 1). Entonces:

a) $P(bueno) = P(-0{,}1 < Z < 0{,}1) = 2 \cdot \Phi(0{,}1) - 1 = 2 \cdot (0{,}5398) - 1 = 0{,}0797$

b) $P(defectuoso) = P(Z < -1{,}2) = P(Z > 1{,}2) = 1 - \Phi(1{,}2) = 1 - 0{,}8451 = 0{,}1539$

c) $P(recuperable) = P(Z > 1{,}34) = 1 - \Phi(1{,}34) = 1 - 0{,}9099 = 0{,}0901$

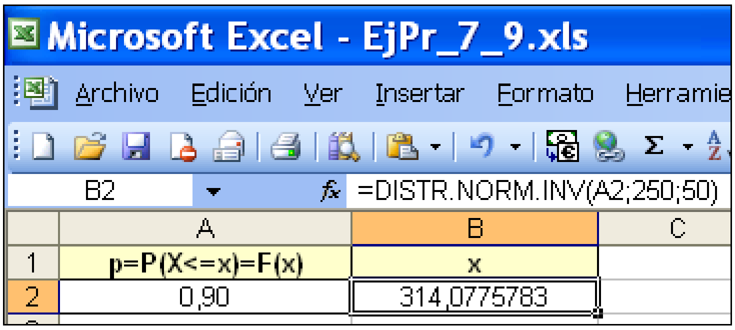


9 La demanda mensual de ordenadores en cierta tienda se aproxima mediante una normal de media 250 unidades y desviación típica 50 unidades. ¿Cuál debe ser el *stock* a principio de mes para que la probabilidad de que se agoten no sea mayor del 10%?

La demanda mensual, X, sigue una N(μ = 250 cm; σ = 50 cm). Se trata de hallar el valor de x tal que $P(X \geq x) \leq 0,10$.

$$1 - P(X \leq x) \leq 0,10 \Leftrightarrow P(X \leq x) \geq 0,90 \Leftrightarrow F(x) \geq 0,90$$

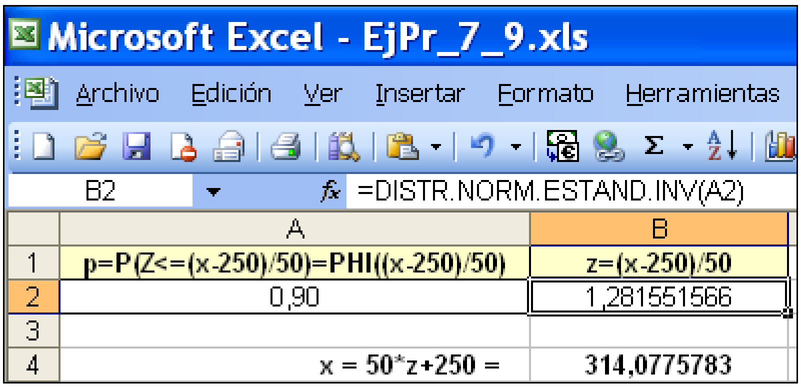
Lo podemos hacer sin tipificar X:



Puede ser interesante hacerlo mediante tipificación, como es usual cuando se hace manualmente:

$$P(X \geq x) \leq 0,90 \Leftrightarrow P\left(\frac{X-250}{50} \leq \frac{x-250}{50}\right) \geq 0,90 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{x-250}{50}\right) \geq 0,90$$

De $\frac{x-250}{50} \geq 1,2816$ se sigue que $x \geq 50 \cdot 1,2816 + 250 = 314,08$. El stock ha de ser igual o superior a 315 ordenadores.



10 Supongamos que las calificaciones de un examen de Selectividad se distribuyen normalmente con una media de 4,9 y desviación típica 2 y que se presentan 1000 alumnos.

a) ¿Cuál es el numero esperado de aprobados?

b) ¿Cuál será el número de alumnos con una nota superior 8,5?

a) $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(\frac{X - 4,9}{2} < \frac{5 - 4,9}{2}) = 1 - P(Z < 0,05) = 1 - \Phi(0,05) =$

$= 1 - 0,5199 = 0,4801$

Luego el número esperado de alumnos aprobados de los 1000 presentados es: 1000·0,4801 $\cong$ 480.

b) $P(X \geq 8,5) = 1 - P(X < 8,5) = 1 - P(\frac{X - 4,9}{2} < \frac{8,5 - 4,9}{2}) = 1 - P(Z < 1,8) = 1 - \Phi(1,8) =$

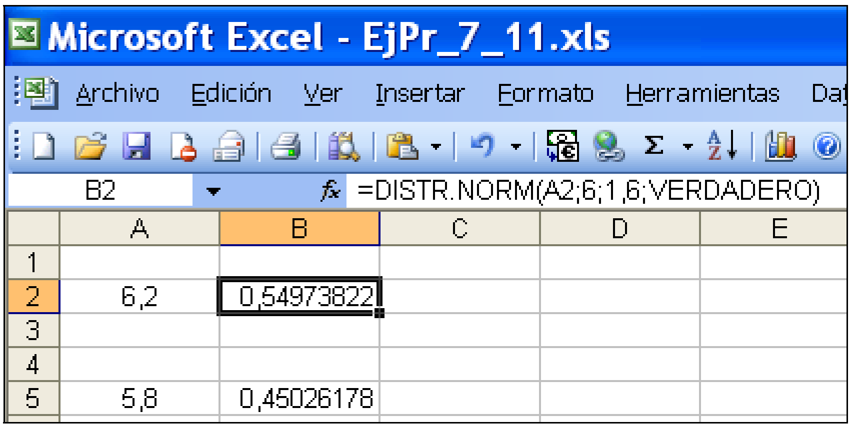
$= 1 - 0,9641 = 0,0359$

En número de alumnos con nota superior a 8,5 es 1000·0,0359=35,9 $\cong$ 36.

11 Los diámetros interiores de unas tuercas se distribuyen normalmente con una media de 6 mm y desviación típica de 1,6 mm. Se consideran buenos aquellos cuyo diámetro está comprendido entre 5,8 y 6,2 mm. ¿Qué porcentaje de defectuosos cabe esperar?

$$P(defectuoso) = 1 - P(bueno) = 1 - P(5,8 \leq X \leq 6,2) = 1 - [P(X \leq 6,2) - P(X < 5,8) =]$$
$$= 1 - F(6,2) + F(5,8) = 1 - 0,5497 + 0,4503 = 0,9005 \cong 90\%,$$

donde F(6,2) = 0,5497 y F(5,8) = 0,4503 se han obtenido en EXCEL sin tipificar:



12 Calcular la media y la desviación típica de una variable aleatoria normal, X, que verifica:

$P(X < 10) = 0{,}6255$ y $P(X \leq 14) = 0{,}9772$.

Si X sigue una $N(\mu\ ;\ \sigma)$, entonces

$$\left.\begin{array}{l} P(X < 10) = 0{,}6255 \\ P(X \leq 14) = 0{,}9772 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P(Z < \dfrac{10-\mu}{\sigma}) = 0{,}6355 \\ P(Z \leq \dfrac{14-\mu}{\sigma}) = 0{,}9772 \end{array}\right\} \Rightarrow (\textit{tablas o EXCEL}) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{10-\mu}{\sigma} = 0{,}32 \\ \dfrac{14-\mu}{\sigma} = 2{,}00 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu + 0{,}32\,\sigma = 10 \\ \mu + 2{,}00\,\sigma = 14 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mu = 9{,}24 \\ \sigma = 2{,}38 \end{array}\right\}$$