

8

DESIGUALDAD DE TCHEBYCHEFF
LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

1 Sea X una variable aleatoria de ley desconocida con $\sigma^2 = 0,001$. Si $\varepsilon = 0,1$, emplear la desigualdad de TCHEBYCHEFF para acotar inferiormente la probabilidad

$$P[|X - E(X)| < \varepsilon]$$

Según la desigualdad de TCHEBYCHEFF:

$$P[|X - E(X)| < \varepsilon] \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{0,001}{0,1^2} = 1 - \frac{0,001}{0,01} = 1 - 0,1 = 0,9$$

2 Sea X una variable aleatoria de ley desconocida con $\sigma^2 = 0,004$. Si $\varepsilon > 0$, emplear la desigualdad de TCHEBYCHEFF para determinar ε de forma que

$$P[|X - E(X)| < \varepsilon] \geq 0,9$$

$$P[|X - E(X)| < \varepsilon] \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{0,004}{\varepsilon^2} \geq 0,9 \Rightarrow \frac{0,004}{\varepsilon^2} \leq 0,1 \Rightarrow \varepsilon^2 \geq \frac{0,004}{0,1} = 0,04$$

Siendo $\varepsilon > 0$, ha de ser $\varepsilon \geq 0,2$

3 Se lanza n veces una moneda "bien equilibrada". Si el número de caras se representa por X , ésta es una variable aleatoria que sigue una distribución binomial $B(n; p = 1/2)$.

Determinar el menor valor de n para que la desigualdad de TCHEBYCHEFF implique

$$P(0,4 < \frac{X}{n} < 0,6) > 0,90$$

Si X sigue una binomial $B(n; p)$, entonces $E[X] = np$ y $\text{Var}[X] = np(1-p)$, luego para la variable $Y = X/n$ se tiene que

$$\begin{cases} E[Y] = E\left[\frac{X}{n}\right] = \frac{1}{n} E[X] = \frac{1}{n} np = p \\ \text{Var}[Y] = \text{Var}\left[\frac{X}{n}\right] = \frac{1}{n^2} \text{Var}[X] = \frac{1}{n^2} np(1-p) = \frac{1}{n} p(1-p) \end{cases}$$

Aplicando el teorema de Thebycheff

$$P[|X - E(X)| < \varepsilon] \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$$

a la variable Y se obtiene

$$P\left[\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\right] \geq 1 - \frac{p \cdot (1-p)}{n \cdot \varepsilon^2}$$

La expresión propuesta en el ejercicio equivale a

$$P\left[\left|\frac{X}{n} - 0,50\right| < 0,10\right] > 0,90$$

En nuestro caso, $p = 0,50$ y $\varepsilon = 0,1$. Entonces:

$$P\left[\left|\frac{X}{n} - 0,50\right| < 0,10\right] \geq 1 - \frac{0,5 \cdot 0,5}{n \cdot (0,1)^2} > 0,90 \Rightarrow n > 250.$$

4 En una cadena de producción el número X de artículos manufacturados defectuosos en una determinada hora se sabe que sigue una distribución de POISSON con media $E(X) = 100$. Emplear la desigualdad de TCHEBYCHEFF para determinar una cota inferior para la probabilidad de que en una hora determinada el número de artículos defectuosos producidos esté comprendido entre 90 y 110. Ídem. entre 80 y 120.

En una distribución de POISSON de parámetro λ , se tiene que $E[X] = \text{Var}[X] = \lambda$. En nuestro caso $\lambda = 100$. Entonces, de $P[|X - E(X)| < \varepsilon] \geq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$ se sigue que

$$P(90 < X < 110) = P[|X - 100| < 10] \geq 1 - \frac{100}{10^2} = 1 - 1 = 0$$

$$P(80 < X < 120) = P[|X - 100| < 20] \geq 1 - \frac{100}{20^2} = 1 - \frac{1}{4} = 0,75$$

La primera cota es bastante inútil, ya que toda probabilidad es positiva. Podemos calcular el valor de las probabilidades pedidas.

Al tratarse de una v. a. discreta,

$$P(90 < X < 110) = P(90 < X \leq 109) = P_{\lambda}(109) - P_{\lambda}(90)$$

$$P(80 < X < 120) = P(80 < X \leq 119) = P_{\lambda}(119) - P_{\lambda}(80)$$

donde $P_{\lambda}(k)$ es la función de distribución acumulativa de la distribución de POISSON de media λ .

	A	B	C	D	E
1	k	P(k)			
2	109	0,8294401			
3	90	0,17138512		P(109)-P(90)=	0,65805498
4					
5	119	0,97176961			
6	80	0,02264918		P(119)-P(80)=	0,94912043

(Es decir, la cota es mejorable si se cuenta con información adicional acerca de la distribución de X).

5 Supongamos que una variable aleatoria X sigue una distribución normal tipificada $N(0; 1)$. Representemos por P_3 la probabilidad de que X difiera de su esperanza matemática $E(X)$ en más de tres veces la desviación típica. Emplear la desigualdad de TCHEBYCHEFF para determinar una cota superior de P_3 .

A continuación, empleando la tabla de la normal, comprobar que hay una cota superior de P_3 que es aproximadamente igual a un cuarentavo de la obtenida por la desigualdad de TCHEBYCHEFF.

En general, $P[|X - \mu| \geq \varepsilon] \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$; si $\varepsilon = k\sigma$, entonces $P[|X - \mu| \geq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2}$.

En nuestro caso, $P_3 = P[|X| \geq 3\sigma] \leq \frac{1}{9} = 0,1111\dots$

Como se sabe que X sigue una normal estándar, entonces:

$$P_3 = P[|X| \geq 3] = 2 \cdot P(X \geq 3) = 2 \cdot [1 - P(X \leq 3)] = 2 \cdot [1 - \Phi(3)] = 2 \cdot [1 - 0,9987] = 0,0026998,$$

Luego $P_3 < 0,0027$, siendo $\frac{0,111111\dots}{0,002698\dots} \cong 42,73$

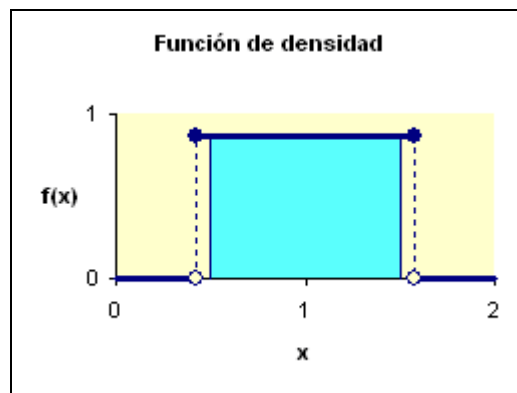
(Es decir, la cota es mejorable si se cuenta con información adicional acerca de la distribución de X).

6 Supongamos que una variable aleatoria X está distribuida uniformemente en el intervalo $[1-1/\sqrt{3}, 1+1/\sqrt{3}]$. Representemos por $P_{3/2}$ la probabilidad de que X difiera de su esperanza matemática $E(X)$ en más de vez y media la desviación típica. Emplear la desigualdad de TCHEBYCHEFF para determinar una cota superior de $P_{3/2}$.

A continuación, calcular dicha probabilidad tomando en cuenta la distribución uniforme.

(De nuevo la cota mejora al contar con información adicional acerca de la distribución de X).

Si X es una v.a. uniformemente distribuida en el intervalo $[a, b]$, su función de densidad es constantemente igual a $k = \frac{1}{b-a}$ en el intervalo $[a, b]$ y a 0 fuera de dicho intervalo. En nuestro caso:



Su esperanza matemática y su varianza son:

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \qquad \text{Var}[X] = \frac{(a-b)^2}{12}$$

En nuestro caso,

$$E[X] = \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{2} = 1$$

$$\text{Var}[X] = \frac{\left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]^2}{12} = \frac{\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}\right]^2}{12} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{1}{3}$$

$$k = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Entonces, de $P[|X - E(X)| \geq \varepsilon] \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$ se sigue que

$$P_{2/3} = P\left[|X - 1| \geq \frac{3}{2}\sigma\right] \leq \frac{\sigma^2}{\left(\frac{3}{2}\sigma\right)^2} = \frac{4}{9} = 0,4444\dots$$

La cota obtenida es muy próxima al valor real:

$$\begin{aligned} P_{2/3} &= P\left[|X - 1| \geq \frac{3}{2}\sigma\right] = P\left[|X - 1| \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}\right] = P\left[|X - 1| \geq \frac{1}{2}\right] = 1 - P\left[|X - 1| < \frac{1}{2}\right] = \\ &= 1 - P\left(-\frac{1}{2} < X - 1 < \frac{1}{2}\right) = 1 - P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = \\ &= 1 - \text{Área rectángulo} = 1 - (\text{base}) \cdot (\text{altura}) = 1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,4226 \end{aligned}$$

7 Supongamos que una variable aleatoria X sigue una distribución binomial $B(n = 10000; p = 1/2)$. (X podría ser el número de caras que aparecen al lanzar una moneda equilibrada 10000 veces). Representemos por P_3 la probabilidad de que X difiera de su esperanza matemática $E(X)$ en más de tres veces la desviación típica (lo que equivale al suceso $X \in]-\infty, 4850] \cup [5150; +\infty[$). Emplear la desigualdad de TCHEBYCHEFF para determinar una cota superior de P_3 .

(En el bloque siguiente, Aproximaciones de la binomial, Ej. 7, se obtiene, mediante una aproximación por la normal, que $P_3 \approx 0,0026 < 0,0030$. Este resultado se puede emplear para determinar si una moneda está bien equilibrada o no: lanzamos la moneda 10000 veces y contamos el número de caras. Podríamos afirmar que la moneda "no es correcta" si el número de caras es inferior a 4850 o superior a 5150)

$$\text{Aquí, } \mu = np = 10000 \cdot \frac{1}{2} = 5000 \text{ y } \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{2500} = 50$$

En general,

$$P_k = P[|X - \mu| \geq k\sigma] \leq \frac{\sigma^2}{(k\sigma)^2} = \frac{1}{k^2}$$

En nuestro caso, $P_3 \leq \frac{1}{9}$.

Desarrollando un poco más:

$$P_k = P[X - \mu \leq -k\sigma] + P[X - \mu \geq +k\sigma] \leq \frac{1}{k^2}$$

$$P_k = P[X \leq \mu - k\sigma] + P[X \geq \mu + k\sigma] = P[X \leq \mu - k\sigma] + [1 - P[X < \mu + k\sigma]] \leq \frac{1}{k^2}.$$

Para $k = 3$,

$$k\sigma = 3 \cdot 50 = 150, \quad \mu - k\sigma = 5000 - 150 = 4850 \quad \mu + k\sigma = 5000 + 150 = 5150$$

$$P_3 = P[|X - 5000| \geq 3 \cdot 50] = 1 + P[X \leq 4850] - P[X < 5150] \leq \frac{1}{9} = 0,1111\dots$$

