

## 9

## APROXIMACIONES DE LA BINOMIAL

1 Una variable aleatoria sigue una distribución binomial  $\mathcal{B}(n = 1000; p = 0,003)$ . Mediante la aproximación por una distribución de POISSON, calcular  $P(X = 2)$ ,  $P(X \leq 3)$  y  $P(X \geq 4)$ .

Puesto que  $n > 100$  y  $np = 3 < 10$ , la aproximación de la binomial mediante una POISSON, con  $\lambda = np = 3$ , puede considerarse excelente.

Por otra parte, para la variable discreta  $X$ , se tiene que

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2),$$

donde  $F(x)$  representa la función de distribución acumulativa de  $X$ .

A continuación se muestran las probabilidades pedidas mediante la aproximación por una distribución de POISSON.

Con el fin de constatar la bondad de la aproximación, se muestra también el cálculo directo con la binomial.

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet titled 'EjPr\_9\_1.xls'. The spreadsheet is organized into two main sections: 'POISSON(lambda=3)' and 'BINOMIAL(n=1000; p=0,003)'. The columns are labeled A, B, and C. The rows contain the following data:

	A	B	C
1	<b>POISSON(lambda=3)</b>		
2	P(X=2)	=POISSON(2;3;FALSO)	0,22404181
3			
4	P(X<=3)	=POISSON(3;3;VERDADERO)	0,64723189
5			
6	P(X>=4)	=1-POISSON(2;3;VERDADERO)	0,57680992
7			
8	<b>BINOMIAL(n=1000; p=0,003)</b>		
9	P(X=2)	=BINOMIAL(2;1000;0,003;FALSO)	0,22415374
10			
11	P(X<=3)	=BINOMIAL(3;1000;0,003;VERDADERO)	0,64723206
12			
13	P(X>=4)	=1-BINOMIAL(2;1000;0,003;VERDADERO)	0,57714651

2 Un partido político, a fin de conocer las preferencias del electorado respecto a dos de sus militantes, Pedro y Juan, para presentarlos como candidatos a un cargo público de responsabilidad, realiza una encuesta sobre una muestra aleatoria de 900 ciudadanos. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 475 ciudadanos manifiesten su preferencia por Pedro en el supuesto que en el total de la población las preferencias están repartidas por igual?

Sea  $X$  la variable aleatoria que da el número de votos favorables a Pedro de entre los 900 encuestados.  $X$  sigue una  $B(n=900; p=0,5)$ , con media  $np=900 \cdot 0,5=450$  y varianza  $npq=900 \cdot 0,5 \cdot 0,5=225$ , luego  $\sigma = 15$ . Entonces, según el Teorema de DE MOIVRE-

LAPLACE,  $Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$  sigue aproximadamente una normal  $N(0; 1)$ . Así

$$P(X \geq 475) = 1 - P(X < 475) = 1 - P(X \leq 474) = 1 - P\left(\frac{X - 450}{15} \leq \frac{474,5 - 450}{15}\right) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1,63) = 1 - \Phi(1,63) = 1 - 0,9488 = 0,0512$$

El cálculo directo con la binomial (posible en EXCEL) proporciona

$$P(X \geq 475) = 1 - P(X < 475) = 1 - P(X \leq 474) = 1 - B(474) = 1 - 0,9488 = 0,0512$$

La diferencia es prácticamente nula.

	A	B	C	D	E
1	<b>APROXIMACIÓN CON LA NORMAL</b>				
2	z	PHI(z)	1-PHI(z)		
3	1,6333333	0,94880054	0,05119946		
4					
5	<b>CÁLCULO DIRECTO BINOMIAL</b>				
6	k	B(k)	1-B(k)		
7	474	0,94882706	0,05117294		

3 En un banco, la probabilidad de recibir un cheque sin fondos es 0,15. Si durante una semana se reciben 1000 cheques, hállese las probabilidades de los siguientes sucesos:

- a) A lo sumo 125 son sin fondos.
- b) El número de cheques sin fondos está comprendido entre 140 y 155.
- c) Los cheques sin fondos son más de 200.

El número X de cheques semanales sin fondos es una v.a. B(n=1000; p=0,15) de media  $np = 150$  y varianza  $npq = 1000 \cdot 0,15 \cdot 0,85 = 127,5$  y  $\sigma = 11,29$ .

a) Según el Teorema de DE MOIVRE-LAPLACE,  $Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$  sigue aproximadamente

una normal N(0; 1). Así

$$P(X \leq 125) = P(X \leq 125,5) = P\left(\frac{X - 150}{11,29} \leq \frac{125,5 - 150}{11,29}\right) = P(Z \leq -2,1701) = 1 - P(Z \leq 2,1701) = 1 - \Phi(2,1701) = 1 - 0,9850 = 0,0150$$

Aproximando mediante POISSON con  $\lambda = np = 150$ ,

$$P(X \leq 125) = \sum_{k=0}^{125} e^{-150} \cdot \frac{150^k}{k!} \approx 0,02043$$

El cálculo directo con la binomial proporciona

$$P(X \leq 125) = \sum_{k=0}^{125} \binom{1000}{k} 0,15^k \cdot 0,85^{1000-k} \approx 0,0135$$

	A	B	C	D
1	<b>APROXIMACIÓN CON LA NORMAL</b>			
2	z	PHI(z)	1-PHI(z)	
3	2,1701	0,98500036	0,01499964	
4				
5	<b>APROXIMACIÓN CON POISSON</b>			
6	k	F(k)		
7	125	0,02043082		
8				
9	<b>CÁLCULO DIRECTO BINOMIAL</b>			
10	k	B(k)		
11	125	0,01349891		

b) Aproximando mediante la normal:

$$P(140 \leq X \leq 150) = P(139,5 \leq X \leq 150,5) = P\left(\frac{139,5 - 150}{11,29} \leq Z \leq \frac{150,5 - 150}{11,29}\right) =$$

$$= P(-0,9300 \leq Z \leq 0,0443) = \Phi(0,0443) - [1 - \Phi(0,9300)] = \Phi(0,0443) + \Phi(0,9300) - 1 =$$

$$= 0,5173 + 0,8238 - 1 = 0,3411$$

Aproximando mediante POISSON con  $\lambda = np = 150$ ,

$$P(X \leq 125) = \sum_{k=0}^{125} e^{-150} \cdot \frac{150^k}{k!} \approx 0,02043$$

El cálculo directo con la binomial proporciona

$$P(140 \leq X \leq 150) = P(139 < X \leq 150) = FP(150) - FP(139) = 0,3251$$

Microsoft Excel - EjPr_9_3.xls					
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ver					
C7      =POISSON(A7;150;VERDADERO)					
	A	B	C	D	E
1	<b>APROXIMACIÓN CON LA NORMAL</b>				<b>P(140&lt;=X&lt;=150)</b>
2	z1	z2	PHI(z1)	PHI(z2)	PHI(z1)+PHI(z2)-1
3	0,0433	0,93	0,5172688	0,82381446	0,341083262
4					
5	<b>APROXIMACIÓN CON POISSON</b>				<b>P(140&lt;=X&lt;=150)</b>
6	k2	k1	FP(k2)	FP(k1)	FP(k2)-FP(k1)
7	150	139	0,52169718	0,19659595	0,325101232
8					
9	<b>CÁLCULO DIRECTO BINOMIAL</b>				<b>P(140&lt;=X&lt;=150)</b>
10	k2	k1	FB(k2)	FB(k1)	FB(k2)-FB(k1)
11	150	139	0,52176887	0,1765486	0,345220276

d) El cálculo directo con la binomial proporciona

$$P(X > 200) = 1 - P(X \leq 199) = 1 - 0,99998778 = 1,22203 \cdot 10^{-5} \approx 0$$

Si aproximamos con la normal:

$$P(X > 200) = 1 - P(X \leq 199,5) = 1 - P\left(Z \leq \frac{199,5 - 150}{11,29}\right) = 1 - P(Z \leq 4,38) = 1 - \Phi(4,38) =$$

$$= 1 - 0,99999507 \approx 0$$

4 La probabilidad de que un artículo de un cierto tipo de producción sea defectuoso es igual a 0,005. Expresar cuál es la probabilidad de que entre 10000 artículos escogidos aleatoriamente haya exactamente 40 defectuosos

- mediante la distribución binomial,
- mediante la aproximación por una distribución de POISSON,
- mediante la aproximación por una distribución normal (Teorema de DeMoivre–Laplace).

a) Mediante la binomial:  $P(X = 40) = \binom{10000}{40} (0,005)^{40} (0,995)^{9960} = 0,02143481$

b) Mediante una POISSON con  $\lambda = 10000 \cdot 0,005 = 50$  se tiene:

$$P(X = 40) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{40}}{40!} = e^{-50} \cdot \frac{50^{40}}{40!} = 0,02149963$$

c) Mediante la normal (teorema de DE MOIVRE-LAPLACE),

$$P(X = 40) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi(z_{40}) = 0,020703161$$

donde  $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}$  es la función de densidad de la normal tipificada, y

$$z_{40} = \frac{40 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{40 - 50}{\sqrt{10000 \cdot (0,005) \cdot (0,995)}} = -1,41776241$$

Microsoft Excel - EjPr_9_4.xls			
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas			
B3      =DISTR.NORM(A3;0;1;FALSO)			
	A	B	C
1	<b>APROXIMACIÓN CON LA NORMAL</b>		<b>P(X=40)</b>
2	<b>z40</b>	<b>phi(z)</b>	<b>phi(z)/RAIZ(npq)</b>
3	-1,41776241	0,146027012	0,020703161
4			
5	<b>APROXIMACIÓN CON POISSON</b>		
6	<b>k</b>	<b>p(k)</b>	
7	40	0,021499631	
8			
9	<b>CÁLCULO DIRECTO BINOMIAL</b>		
10	<b>k</b>	<b>b(k)</b>	
11	40	0,021434812	

5 La probabilidad de acertar un blanco en movimiento por cierta arma de fuego es 0,001 en cada disparo. Expresar la probabilidad de que en 5000 disparos acierte al menos dos veces,

- a) mediante la distribución binomial,
- b) mediante la aproximación por una distribución de POISSON, y
- c) mediante la aproximación por una distribución normal (Teorema de DeMoivre–Laplace).

a) El número de aciertos,  $X$ , sigue una binomial con  $n = 5000$  y  $p = 0,001$ .

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0,04036031 = 0,95963969$$

b) Aproximando mediante una POISSON con  $\lambda = np = 5$ , se tiene:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0,04042768 = 0,95957232$$

c) Por el Teorema de DEMOIVRE-LAPLACE,  $Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$  sigue aproximadamente

una normal  $N(0; 1)$ , luego

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X \leq 1,5) = 1 - P\left(\frac{X - 5}{2,2349} \leq \frac{1,5 - 5}{2,2349}\right) =$$

$$= 1 - P(Z \leq -1,5660) = 1 - \Phi(-1,5660) = 0,9413293$$

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

Microsoft Excel - EjPr_9_5.xls			
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas			
B11      fx =DISTR.NORM.ESTAND(A11)			
	A	B	C
1	<b>CÁLCULO DIRECTO BINOMIAL</b>		
2	<b>k</b>	<b>B(k)</b>	<b>1-B(k)</b>
3	1	0,04036031	0,95963969
4			
5	<b>APROXIMACIÓN CON POISSON</b>		
6	<b>k</b>	<b>F(k)</b>	<b>1-F(k)</b>
7	1	0,04042768	0,95957232
8			
9	<b>APROXIMACIÓN CON LA NORMAL</b>		
10	<b>z</b>	<b>PHI(z)</b>	<b>1-PHI(z)</b>
11	-1,5660308	0,0586707	0,9413293

6 Un trabajador de una industria textil atiende varios cientos de husos, cada uno de los cuales enrolla su propia bobina. En ese proceso, el hilo se rompe por distintas causas. Asumiendo que el trabajador se ocupa de 800 husos y la probabilidad de rotura de hilo en cada huso en un intervalo de tiempo  $\tau$  es 0,005, calcular el número esperado de roturas en el periodo  $\tau$  y la probabilidad de que en el intervalo  $\tau$  haya no más de 10 roturas y la de que haya al menos 3 roturas).

El número esperado de roturas en el período citado es  $E(X) = np = 800 \cdot 0,005 = 4$ . Como  $n$  es grande y  $p$  pequeño, podemos aproximar mediante POISSON con  $\lambda = 4$ .

$$P(X \leq 10) = F(10)$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2)$$

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet titled "EjPr\_9\_6.xls". The active cell is C9, containing the formula `=POISSON(A9;4;VERDADERO)`. The spreadsheet is divided into two sections: "CÁLCULO DIRECTO BINOMIAL" and "APROXIMACIÓN CON POISSON".

CÁLCULO DIRECTO BINOMIAL				
	k		B(k)	1-B(k)
3	10	P(X<=10)=	0,99723910	
4	2	P(X<=2)=	0,23736915	P(X>=3)= 0,76263085
APROXIMACIÓN CON POISSON				
	k		F(k)	1-F(k)
9	10	P(X<=10)=	0,99716023	
10	2	P(X<=2)=	0,23810331	P(X>=3)= 0,76189669

7 Supongamos que una variable aleatoria  $X$  sigue una distribución binomial  $\mathcal{B}(n = 10000; p = 1/2)$ . ( $X$  podría ser el número de caras que aparecen al lanzar una moneda equilibrada 10000 veces). Representemos por  $P_3$  la probabilidad de que  $X$  difiera de su esperanza matemática  $E(X)$  en más de tres veces la desviación típica (lo que equivale al suceso  $X \in ]-\infty, 4850] \cup [5150; +\infty[$ ). Emplear la aproximación por la normal para determinar una cota superior de  $P_3$ . ( $P_3 \approx 0'026 < 0'0030$ )

(Esta cota mejora la obtenida en el bloque anterior mediante la desigualdad de Tchebycheff:  $P_3 \leq 1/9 \approx 0,1111$ )

Si  $X$  sigue una binomial  $\mathcal{B}(n = 10000; p = 1/2)$ , entonces,

$$\mu = n \cdot p = 10000 \cdot \frac{1}{2} = 5000 \text{ y } \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{2500} = 50$$

Por el Teorema de DE MOIVRE-LAPLACE,  $Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$  sigue aproximadamente una normal  $N(0; 1)$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} P_3 &= P[|X - 5000| \geq 3 \cdot 50] = P[X - 5000 \leq -150] + P[X - 5000 \geq 150] = \\ &= P[X \leq 4850] + P[X \geq 5150] = P\left[Z \leq \frac{4850 - 5000}{50}\right] + P\left[Z \geq \frac{5150 - 5000}{50}\right] = \\ &= P[Z \leq -3] + P[Z \geq 3] = 2 \cdot P(Z \geq 3) = 2 \cdot [1 - P(Z \leq 3)] = 2 \cdot [1 - \Phi(3)] = 0,0026998 < 0,0030 \end{aligned}$$

Microsoft Excel - EjPr_9_7.xls				
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas				
B2      =DISTR.NORM.ESTAND(A2)				
	A	B	C	D
1	z	PHI(z)	2*[1-PHI(z)]	
2	3	0,9986501	0,0026998	