

1 Supongamos que una variable aleatoria X sigue una ley $N(\mu; \sigma = 0,09)$. A partir de una muestra de tamaño $n = 100$, se obtiene una media muestral $\bar{x}_{100} = 1,70$. Se desea contrastar la hipótesis nula $H_0: \mu = 1,68$ frente a la hipótesis alternativa $H_1: \mu > 1,68$, con un nivel de significación $\alpha = 0,05$

Si \bar{X} fuese “mucho” mayor que $\mu_0 = 1,68$ habría que pensar que H_0 no es cierta, e inclinarse por H_1 . Se trata por tanto de determinar una cantidad K tal que la probabilidad $P(\bar{X} - \mu_0 > K)$ sea pequeña: el nivel de significación $P(\bar{X} - \mu_0 > K) = \alpha$, lo que equivale a $P(\bar{X} \leq \mu_0 + K) = 1 - \alpha$.

Si la variable aleatoria X sigue una ley normal $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$, entonces la media muestral \bar{X} sigue una ley normal $\mathcal{N}(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ y la variable tipificada $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ una normal $\mathcal{N}(0; 1)$.

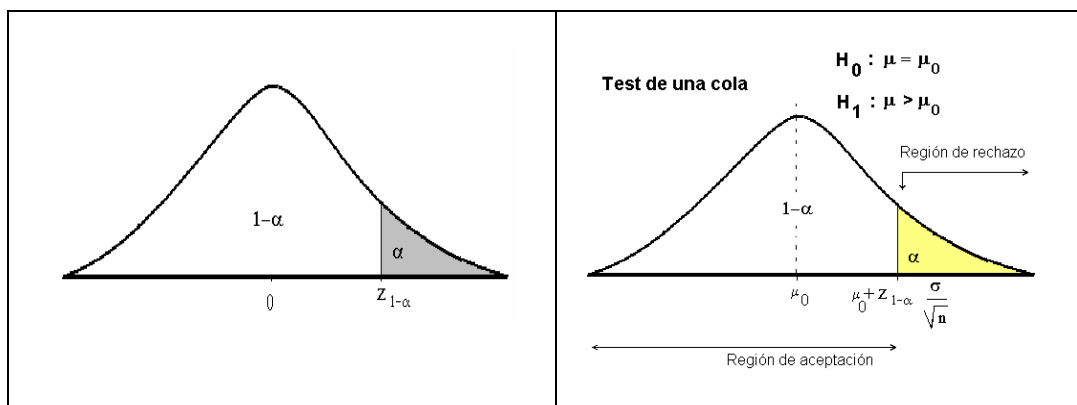
Si $H_0: \mu = \mu_0 = 1,68$ es cierta, entonces $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0; 1)$, y la

probabilidad de aceptar H_0 es: $P(Z < z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, luego

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{1-\alpha}\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow P\left(\bar{X} < \mu_0 + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Entonces $K = z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y la región de aceptación para H_0 es, el intervalo:

$$\mathcal{R}_A = \left] -\infty; \mu_0 + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$



En nuestro caso $P(Z < z_{1-\alpha}) = \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - 0,05 = 0,95$

Buscando en la tabla de $\Phi(z)$ o usando EXCEL, obtenemos $z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(0,95) = 1,6450$. Por tanto:

$$\mathcal{R}_A = \left] -\infty; \mu_0 + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[= \left] -\infty; 1,68 + 1,6450 \cdot \frac{0,09}{\sqrt{100}} \right[= \left] -\infty; 1,6948 \right[$$

Microsoft Excel - EjPr_12_1.xls				
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ?				
D2 $\text{=DISTR.NORM.ESTAND.INV}(1-B2)*B4/\text{RAIZ}(C2)$				
	A	B	C	D
1	nivel de confianza=1-alfa	alfa	tamaño=n	K
2	0,95	0,05	100	0,0148
3				
4	sigma =	0,09		
5	Ho: mu(o) =	1,68		
6	EXTREMOS:	a	b	
7	REGIÓN DE ACEPTACIÓN =]	$-\infty$	1,6948	[
8	media de la muestra=	1,70		

Como $\bar{x}_{100} = 1,70 \notin \mathcal{R}_A$, hay razones para rechazar la hipótesis nula $H_0: \mu=1,70$. (El contraste es *significativo estadísticamente*).

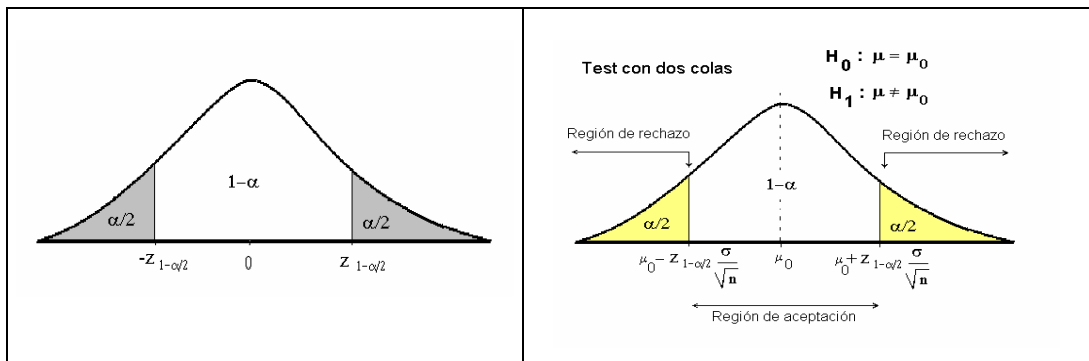
La región de rechazo resulta ser: $\mathcal{R}_R =]1,6948; +\infty[$, por lo que el **contraste** realizado se dice que es **unilateral** o **de una cola**.

2 Supongamos que una variable aleatoria X sigue una ley $N(\mu; \sigma = 120)$. A partir de una muestra de X de tamaño $n = 100$, se obtiene una media muestral $\bar{x}_{100} = 1570$. Se desea contrastar la hipótesis nula $H_0: \mu = 1600$ frente a la hipótesis alternativa $H_1: \mu \neq 1600$, con un nivel de significación $\alpha = 0,05$

Si \bar{X} distase “mucho” de 1600 habría que pensar que H_0 no es cierta e inclinarse por H_1 . Se trata por tanto de determinar una cantidad K tal que la probabilidad $P(|\bar{X} - \mu_0| > K)$ sea pequeña: el nivel de significación $P(|\bar{X} - \mu_0| > K) = \alpha$, lo que equivale a $P(\mu_0 - K \leq \bar{X} \leq \mu_0 + K) = 1 - \alpha$.

Si $H_0: \mu = \mu_0 = 1600$ es cierta, entonces $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0; 1)$, y la

probabilidad de aceptar H_0 es: $P(-z_{1-\alpha/2} < Z < z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$



$$P\left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\mu_0 - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu_0 + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Así, $K = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. La **región de aceptación** para H_0 es, por tanto, el intervalo

$$\mathcal{R}_A = \left] \mu_0 - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \mu_0 + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

En nuestro caso $P(-z_{1-\alpha/2} < Z < z_{1-\alpha/2}) = 1 - 0,05 = 0,95$. Pero

$$P(Z < z_{1-\alpha/2}) - P(Z < -z_{1-\alpha/2}) = P(Z < z_{1-\alpha/2}) - [1 - P(Z < z_{1-\alpha/2})] =$$

$$= 2 \cdot P(Z < z_{1-\alpha/2}) - 1 = 0,95 \Rightarrow P(Z < z_{1-\alpha/2}) = \frac{1,95}{2} = 0,975$$

Buscando en la tabla de $\Phi(z)$, o con EXCEL, obtenemos $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$. Por tanto:

$$\mathcal{R}_A = \left] 1600 - (1,96) \cdot \frac{120}{\sqrt{100}}; 1600 + (1,96) \cdot \frac{120}{\sqrt{100}} \right[=]1576,48; 1623,52[$$

	A	B	C	D
1	nivel de confianza=1-alfa	alfa	tamaño=n	K
2	0,95	0,05	100	23,5196
3				
4	sigma =	120		
5	mu(0) =	1600,00		
6	EXTREMOS:	a	b	
7	REGIÓN DE ACEPTACIÓN =]	1576,4804	1623,5196	[
8	media de la muestra=	1570		

Como $\bar{x}_{100} = 1570 \notin \mathcal{R}_A$, se rechaza la hipótesis nula $H_0: \mu = 1600$ al nivel de significación del 5%. (El contraste es *significativo estadísticamente*).

La región de rechazo resulta ser: $\mathcal{R}_R =]-\infty; 1576,48] \cup [1623,52; +\infty[$, por lo que el **contraste** realizado se dice que es **bilateral** o **de dos colas**.

3 Supongamos que la vida media de las bombillas de 60 vatios de una determinada marca está garantizada por lo menos en 800 horas, con una desviación típica de 120 horas. Se eligen al azar 25 bombillas de un pedido y se comprueba que la vida media de la muestra es de 750 horas. Al nivel de significación $\alpha = 0,05$, ¿habría que rechazar el pedido por no cumplir la garantía?

(Contrastar $H_0: \mu = 800$ frente a la hipótesis alternativa $H_1: \mu < 800$, ya que sólo interesa saber si la media llega al valor mínimo de garantía o no)

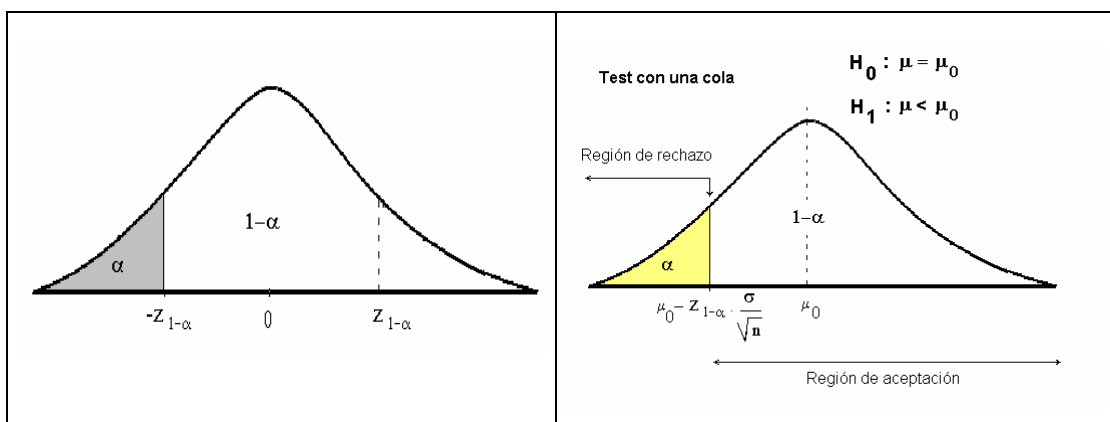
Si \bar{X} fuese “mucho” menor que $\mu_0 = 800$ habría que pensar que H_0 no es cierta, e inclinarse por H_1 . Se trata por tanto de determinar una cantidad K tal que la probabilidad $P(\mu_0 - \bar{X} > K)$ sea pequeña: el nivel de significación $P(\mu_0 - \bar{X} > K) = \alpha$, lo que equivale a $P(\bar{X} < \mu_0 - K) = \alpha$, luego $P(\bar{X} > \mu_0 - K) = 1 - \alpha$

Si la variable aleatoria X sigue una ley normal $\mathcal{N}(\mu; \sigma)$, entonces la media muestral \bar{X} sigue una ley normal $\mathcal{N}(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ y la variable tipificada $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ una normal $\mathcal{N}(0; 1)$.

Si $H_0: \mu = \mu_0 = 800$ es cierta, entonces $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0; 1)$, y:

$P(Z \leq -z_{1-\alpha}) = \alpha$, luego $P(Z > -z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, y

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > -z_{1-\alpha}\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow P\left(\bar{X} > \mu_0 - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$



Así, $K = z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. La **región de aceptación** para H_0 es, por tanto, el intervalo

$$\mathcal{R}_A = \left] \mu_0 - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; +\infty \right[$$

En nuestro caso $P(Z < z_{1-\alpha}) = \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - 0'05 = 0'95$

Buscando en la tabla de $\Phi(z)$ o usando EXCEL obtenemos $z_{1-\alpha} = 1,645$. Por tanto:

$$\mathcal{R}_A = \left] \mu_0 - z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; +\infty \right[= \left] 800 - (1,645) \cdot \frac{120}{\sqrt{25}}; +\infty \right[=]760,52; +\infty[$$

	A	B	C	D
1	nivel de confianza=1-alfa	alfa	tamaño=n	K
2	0,95	0,05	25	39,4765
3				
4	sigma =	120		
5	Ho: mu(o) =	800		
6	EXTREMOS:	a	b	
7	REGIÓN DE ACEPTACIÓN =]	760,52	+∞	[
8	media de la nuestra=	750		

Como $\bar{x}_{25} = 750 \notin \mathcal{R}_A$, se rechaza la hipótesis nula $H_0: \mu = 800$. (El contraste es significativo estadísticamente).

La región de rechazo resulta ser: $\mathcal{R}_R =]-\infty; 760,52]$, por lo que el contraste realizado se dice que es **unilateral** o **de una cola**.

4 La longitud media de una muestra de 625 tubos de una producción es de 20,05 mm. ¿Puede considerarse razonablemente, con un nivel de significación $\alpha = 0,01$, que la muestra ha sido extraída aleatoriamente de una población de longitud media 20 mm y desviación típica 0,1 mm?
 (Contrastar $H_0: \mu = 20$ frente a la hipótesis alternativa $H_1: \mu > 20$)

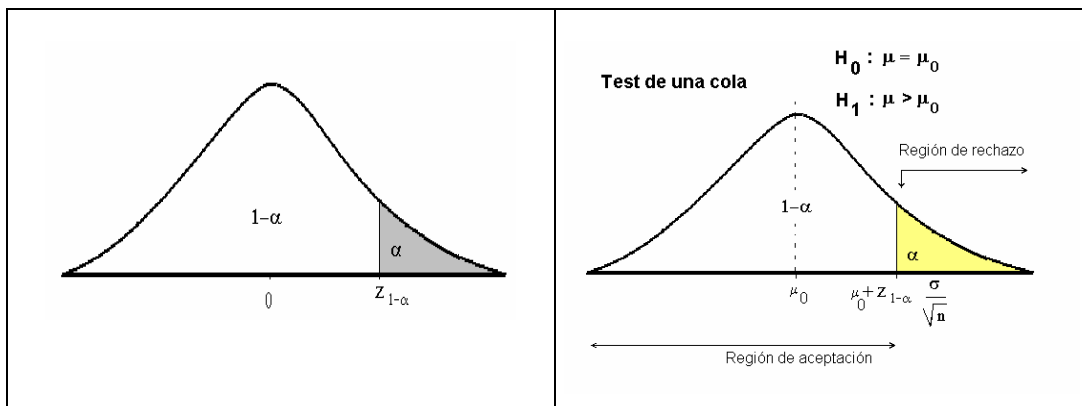
Si $H_0: \mu = \mu_0 = 20$ es cierta, entonces $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0; 1)$, y la probabilidad de

aceptar H_0 es: $P(Z < z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$, luego

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{1-\alpha}\right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow P\left(\bar{X} < \mu_0 + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Entonces $K = z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y la región de aceptación para H_0 es, el intervalo:

$$\mathcal{R}_A = \left] -\infty; \mu_0 + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$



En nuestro caso $P(Z < z_{1-\alpha}) = \Phi(z_{1-\alpha}) = 1 - 0'01 = 0'99$

Buscando en la tabla de $\Phi(z)$ o usando EXCEL, obtenemos $z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(0,99) = 2,33$. Por tanto:

$$\mathcal{R}_A = \left] -\infty; \mu_0 + z_{1-\alpha} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[= \left] -\infty; 20 + 2,33 \cdot \frac{0,01}{\sqrt{625}} \right[= \left] -\infty; 20,0093 \right[$$

	A	B	C	D
1	nivel de confianza=1-alfa	alfa	tamaño=n	K
2	0,99	0,01	625	0,0093
3				
4	sigma =	0,1		
5	Ho: mu(o) =	20		
6	EXTREMOS:	a	b	
7	REGIÓN DE ACEPTACIÓN =]	-∞	20,0093	[
8	media de la muestra=	20,05		

Como $\bar{x}_{625} = 20,05 \notin \mathcal{R}_A$, hay razones para rechazar la hipótesis nula $H_0: \mu=20$. (El contraste es *significativo estadísticamente*).

La región de rechazo resulta ser: $\mathcal{R}_R = [20,0093; +\infty[$, y el **contraste** realizado es **unilateral** o **de una cola**.

5 Un laboratorio elabora un cierto producto químico en numerosas fases. Se sabe que el número medio de unidades fabricadas por fase es de 220 unidades, con una desviación típica de 12 unidades. Después de un cambio en el procedimiento de obtención, la producción en 25 fases mostró aproximadamente la misma varianza y una producción media de 225 unidades.

Contrastar la hipótesis de que el cambio en el procedimiento no incrementó la producción significativamente,

- a) al nivel de significación del 0,05,
- b) al nivel 0,001.

(Contrastar $H_0: \mu = 220$ frente a la hipótesis alternativa $H_1: \mu > 220$)

Se trata de ver cómo afecta el nivel de significación al hecho de aceptar o rechazar la hipótesis nula: en el caso a) se tiene

	A	B	C	D
1	nivel de confianza=1-alfa	alfa	tamaño=n	K
2	0,95	0,05	25	3,9476
3				
4	sigma =	12		
5	Ho: mu(o) =	220		
6	EXTREMOS:	a	b	
7	REGIÓN DE ACEPTACIÓN =]	-∞	223,9476	[
8	media de la muestra=	225		

Como $\bar{x}_{25} = 225 \notin \mathcal{R}_A$, hay razones para rechazar la hipótesis nula $H_0: \mu=20$. (El contraste es *significativo estadísticamente*).

En el caso b):

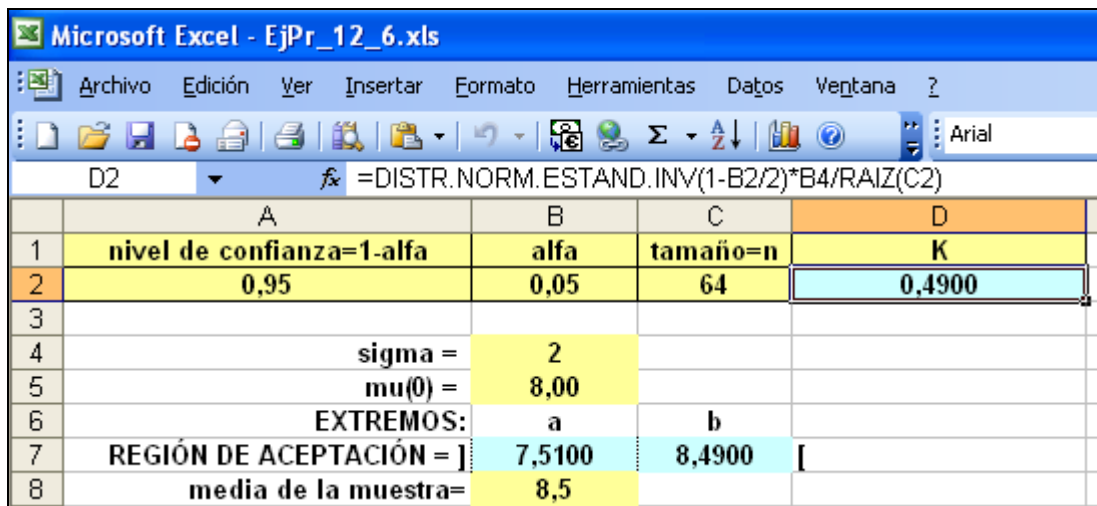
	A	B	C	D
1	nivel de confianza=1-alfa	alfa	tamaño=n	K
2	0,999	0,001	25	7,4166
3				
4	sigma =	12		
5	Ho: mu(o) =	220		
6	EXTREMOS:	a	b	
7	REGIÓN DE ACEPTACIÓN =]	-∞	227,4166	[
8	media de la muestra=	225		

Ahora $\bar{x}_{25} = 225 \in \mathcal{R}_A$, y se acepta la hipótesis nula $H_0: \mu=20$. (El contraste *no es significativo estadísticamente*).

6 El promedio de la “carga de rotura” de un cierto metal (“*fuerza de tracción mínima que ha de ejercerse por unidad de sección para que tenga lugar la rotura*”) es de 8 kp/mm². Una muestra de 64 piezas de dicho metal es tratada químicamente midiéndose nuevamente la carga de rotura de todas las piezas. Se encuentra que el promedio es ahora 8,5 kp/mm². Suponiendo que la desviación típica de la carga de rotura es 2 kp/mm² antes y después del tratamiento químico, contrastar la hipótesis, al 0,05 y al 0,01, de que el producto químico no tiene efecto sobre la carga de rotura del metal.

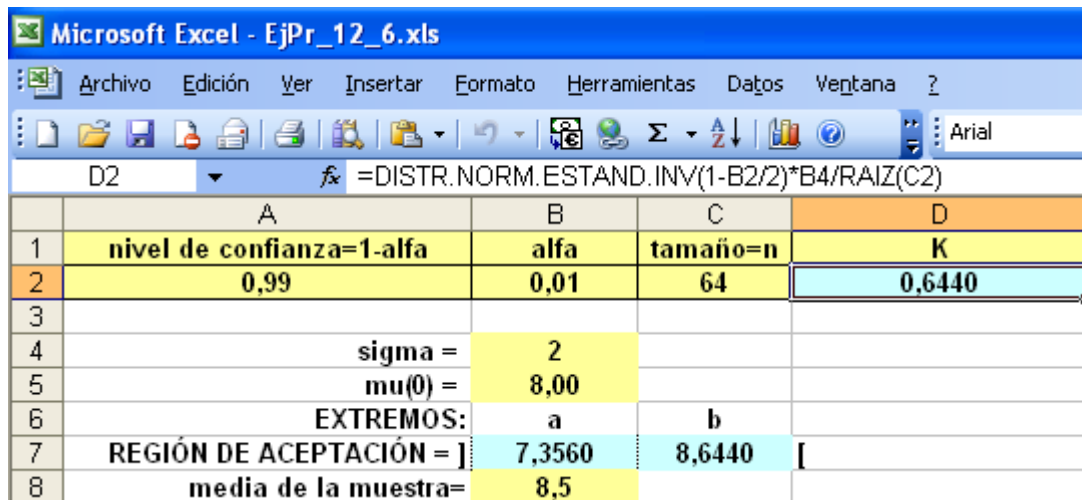
(Reflexionar sobre si debería emplearse un test de una o dos colas, teniendo en cuenta que, antes del tratamiento, no se sabe si la carga de rotura aumentará o disminuirá).

Puesto que no se conoce de antemano si el tratamiento aumenta o disminuye la carga de rotura, lo adecuado es realizar un contraste de dos colas.



	A	B	C	D
1	nivel de confianza=1-alfa	alfa	tamaño=n	K
2	0,95	0,05	64	0,4900
3				
4	sigma =	2		
5	mu(0) =	8,00		
6	EXTREMOS:	a	b	
7	REGIÓN DE ACEPTACIÓN =]	7,5100	8,4900	[
8	media de la muestra=	8,5		

Como $\bar{x}_{64} = 8,5 \notin \mathcal{R}_A$, hay razones para rechazar la hipótesis nula $H_0: \mu = 8$. (El contraste es *significativo estadísticamente*).



	A	B	C	D
1	nivel de confianza=1-alfa	alfa	tamaño=n	K
2	0,99	0,01	64	0,6440
3				
4	sigma =	2		
5	mu(0) =	8,00		
6	EXTREMOS:	a	b	
7	REGIÓN DE ACEPTACIÓN =]	7,3560	8,6440	[
8	media de la muestra=	8,5		

Ahora $\bar{x}_{25} = 8,5 \in \mathcal{R}_A$, y se acepta la hipótesis nula $H_0: \mu = 8$. (El contraste *no es significativo estadísticamente*).

7 Para comprobar si una moneda está bien equilibrada se lanza 100 veces y se anota el número de caras, n_C . La proporción de caras obtenida en la muestra es entonces $p_C = \frac{n_C}{100}$. Si la moneda es correcta, la proporción poblacional es $p = 0,50$.

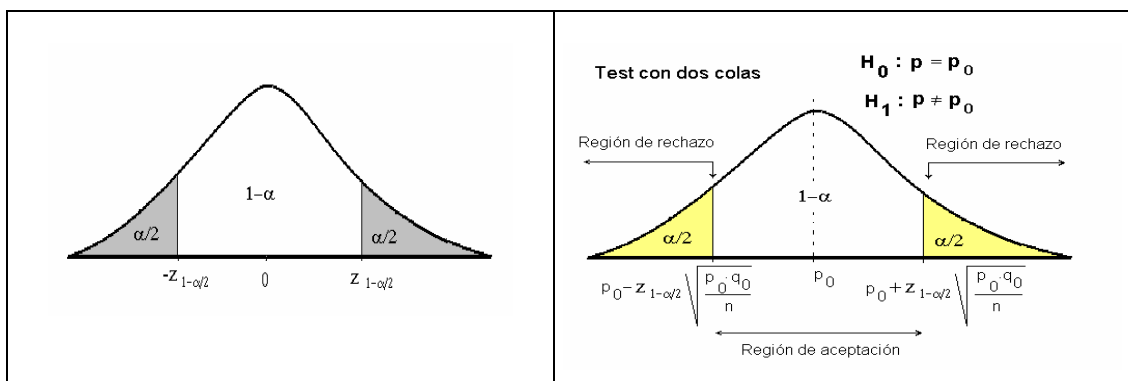
Contrastar la hipótesis nula $H_0: p = 0,50$ frente a la hipótesis alternativa $H_1: p \neq 0,50$, con un nivel de significación $\alpha = 0,05$ en los casos:

- a) $n_C = 38$
- b) $n_C = 46$
- c) $n_C = 58$

(En el tercer caso, ¿sería conveniente cambiar $H_1: p \neq 0,50$ por $H_1: p > 0,50$, y repetir el experimento.)

La distribución muestral de la proporción de caras en las muestras de tamaño n , $P = \frac{n_C}{n}$, sigue aproximadamente una ley normal $\mathcal{N}(p; \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$, donde p es la probabilidad constante de cara en cada lanzamiento. Si $H_0: p = p_0$ es cierta, entonces la variable $Z = \frac{P - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$ sigue aproximadamente una $\mathcal{N}(0; 1)$, y la probabilidad de aceptar H_0 es:

$$P(-z_{1-\alpha/2} < Z < z_{1-\alpha/2}) \approx 1 - \alpha$$



$$P\left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{P - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} < z_{1-\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha$$

$$P\left(p_0 - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} < P < p_0 + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right) \approx 1 - \alpha$$

La región de aceptación para H_0 es, por tanto, el intervalo

$$\mathcal{R}_A = \left[p_0 - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}; p_0 + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right]$$

Sea $K = z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$. Entonces tenemos:

Microsoft Excel - EjPr_12_7.xls				
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ?				
D2 fx =DISTR.NORM.ESTAND.INV(1-B2/2)*RAIZ(B4*(1-B4)/C2)				
	A	B	C	D
1	nivel de confianza=1-alfa	alfa	tamaño=n	K
2	0,95	0,05	100	0,0980
3				
4	p0 =	0,50		
5	EXTREMOS:	a=p0-K	b=p0+K	
6	REGIÓN DE ACEPTACIÓN =]	0,4020	0,5980	[
7	proporción en la muestra =			
8	a) 38/100	0,38		
9	b) 46/100	0,46		
10	c) 58/100	0,58		
11				
12				
13	0,35	0,40	0,45	0,50
14				0,55
15				0,60

En el caso a) la proporción en la muestra $\frac{n_C}{n} = \frac{38}{100} = 0,38 \notin \mathcal{R}_A$, y hay razones para rechazar la hipótesis nula $H_0: p = 0,50$. Se podría pensar que la moneda da mayor proporción de “cruces” que de “caras”.

En el caso b) la proporción en la muestra $\frac{n_C}{n} = \frac{46}{100} = 0,46 \in \mathcal{R}_A$, y se acepta la hipótesis nula $H_0: p = 0,50$. Como se sabe, el aceptar $H_0: p = 0,5$, **no significa que sea cierta. Significa que la probabilidad de aceptarla siendo cierta es muy alta: $1 - \alpha = 0,95$** . No hay motivos para pensar que la moneda esté trucada.

En el caso c) la proporción en la muestra $\frac{n_C}{n} = \frac{58}{100} = 0,58 \in \mathcal{R}_A$, y se puede aceptar la hipótesis nula $H_0: p = 0,50$, pero es de sospechar que la proporción de “caras” es mayor que la de “cruces”. Esto invita a contrastar, después de obtener otra muestra, la hipótesis $H_0: p = 0,50$ frente a $H_1: p > 0,50$.

8 Se va a estudiar la posibilidad de desequilibrio de un dado ordinario. De 900 tiradas del dado han salido 140 seises. Usar este resultado para contrastar la hipótesis nula de que el dado está bien equilibrado ($H_0: p = 1/6$) empleando un test de doble cola con un nivel de significación

- a) del 0,05
- b) del 0,01

En los dos casos la proporción de seises $\hat{p} = \frac{140}{900} = 0,1556$ pertenece a la región de aceptación y se acepta la hipótesis nula:

Microsoft Excel - EjPr_12_8.xls				
Archivo Edición Ver Insertar Formato Herramientas Datos Ventana ?				
D10 fx =DISTR.NORM.ESTAND.INV(1-B10/2)*RAIZ(B12*(1-B12)/C10)				
	A	B	C	D
1	nivel de confianza=1-alfa	alfa	tamaño=n	K
2	0,95	0,05	900	0,024348
3				
4	p0 = 1/6 =	0,1667		
5	EXTREMOS:	a=p0-K	b=p0+K	
6	REGIÓN DE ACEPTACIÓN =]	0,1423	0,1910	[
7	proporción en la muestra =	0,1556		
8				
9	nivel de confianza=1-alfa	alfa	tamaño=n	K
10	0,99	0,01	900	0,0320
11				
12	p0 = 1/6 =	0,1667		
13	EXTREMOS:	a=p0-K	b=p0+K	
14	REGIÓN DE ACEPTACIÓN =]	0,1347	0,1987	[
15	proporción en la muestra =	0,1556		

9 Se pensó que el 5% de artículos manufacturados por una cadena de producción eran defectuosos. Tomar $H_0: p = 0,05$ como hipótesis nula y formular una regla de decisión para contrastarla, al nivel de significación del 1%, frente a la hipótesis alternativa de dos colas. Suponer que el tamaño de la muestra extraída es 400. Si de esta muestra 26 artículos son defectuosos, ¿qué decisión se debe tomar?

La proporción artículos defectuosos en la muestra $\hat{p} = \frac{26}{400} = 0,0650$ pertenece a la región de aceptación y se acepta la hipótesis nula:

	A	B	C	D
1	nivel de confianza=1-alfa	alfa	tamaño=n	K
2	0,99	0,01	400	0,028069
3				
4	$p_0 = 1/6 =$	0,05		
5	EXTREMOS:	$a=p_0-K$	$b=p_0+K$	
6	REGIÓN DE ACEPTACIÓN =]	0,0219	0,0781	[
7	proporción en la muestra =	0,0650		

10 En un Instituto las notas de Selectividad de Matemáticas, consideradas durante varios años, dan un porcentaje promedio del 55% de aprobados. En 2003, de un grupo de 100 estudiantes que se examinaron, aprobaron 62. Contrastar la hipótesis de que este fue un número significativamente alto de aprobados y que 2003 fue un “buen año” para los estudiantes de Matemáticas de dicho Instituto. Usar $\alpha = 0,01$
 (Contrastar $H_0: p = 0,55$ frente a la hipótesis alternativa $H_1: p > 0,55$)

La distribución muestral de la proporción de aprobados en las muestras de tamaño n , $P = \frac{n_A}{n}$, sigue aproximadamente una ley normal $\mathcal{N}(p; \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$. Si $H_0: p = p_0$ es cierta, entonces la variable $Z = \frac{P - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$ sigue aproximadamente una $\mathcal{N}(0;1)$, y la probabilidad de aceptar H_0 es:

$$P(Z \leq z_{1-\alpha}) \approx 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{P - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \leq z_{1-\alpha}\right) \approx 1 - \alpha$$

$$P\left(P \leq p_0 + z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right) \approx 1 - \alpha$$

Puesto que la proporción de aprobados es mayor o igual que cero, la **región de aceptación** para H_0 es, por tanto, el intervalo

$$\mathcal{R}_A = \left] 0; p_0 + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right[$$

Sea $K = z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}$. Entonces tenemos:

	A	B	C	D
1	nivel de confianza=1-alfa	alfa	tamaño=n	K
2	0,99	0,01	100	0,115734
3				
4	p0 =	0,55		
5	EXTREMOS:	a	b=p0+K	
6	REGIÓN DE ACEPTACIÓN =]	0	0,6657	[
7	proporción en la muestra =	0,62		

La proporción de aprobados en la muestra es $\hat{p} = 0,62$. Está en la región de aceptación, luego no es lo suficientemente grande como para poder rechazar la hipótesis nula H_0 . Así, no podemos concluir que, para un nivel de significación α del 1%, los estudiantes del 2003 sean significativamente mejores que los de los años anteriores.

Si la proporción muestral de aprobados en 2003 hubiese sido mayor que 0,6657, la hipótesis H_0 de que los estudiantes de 2003 no son mejores que los anteriores, tendría que ser rechazada al nivel del 1%. Como esto no ocurre, H_0 no puede ser rechazada.