VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS

Sea **[Ω, $\mathcal{P}$(Ω), P]** un espacio probabilístico finito (o infinito numerable). Se llama <u>variable aleatoria discreta</u> a toda aplicación **X: Ω** $\longrightarrow \mathbb{R}$.

Se dice que la variable aleatoria <u>X está definida sobre Ω</u>.

Sea $\Omega = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$; al conjunto

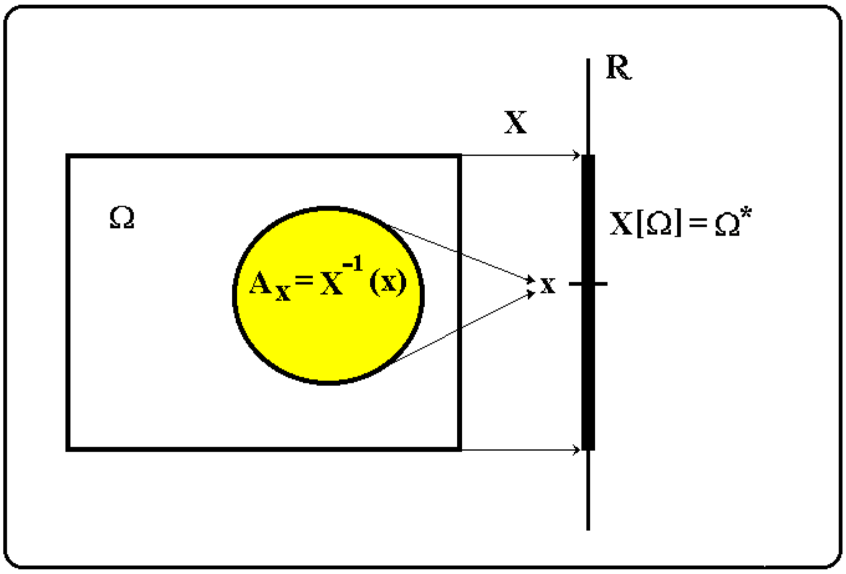
$$\mathbf{\Omega^* = X[\Omega] = Im[X] = \{ X(s) \mid s \in \Omega \} = \{ x_1 < x_2 < \dots < x_k \},}$$

imagen de la función X, subconjunto del conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, (en el que hemos escrito sus elementos en orden creciente) se le llama <u>espacio muestral imagen de Ω por X</u>.

Si $\mathbf{x} \in \mathbf{\Omega^*}$, entonces

$$\mathbf{A_x = X^{-1}(x) = \{ s \in \Omega \mid X(s) = x \} \in \mathcal{P}(\Omega)}$$

es el <u>suceso asociado a x</u>.



Es de notar que si $x_i \neq x_j$, entonces $\mathbf{X^{-1}(x_i) \cap X^{-1}(x_j) = \varnothing}$, ya que, de lo contrario, X dejaría de ser aplicación (dos elementos distintos tendrían la misma imagen); es decir, $\mathbf{A_i \cap A_j} = \varnothing$, y los sucesos $\mathbf{A_i}$ y $\mathbf{A_j}$ son mutuamente excluyentes (incompatibles).

PROBABILIDAD IMAGEN

ESPACIO PROBABILÍSTICO IMAGEN

Se trata ahora de dotar de una probabilidad al conjunto imagen de X:

$$\mathbf{\Omega^* = X[\Omega] = Im[X] = \{X(s) \mid s \in \Omega\}.}$$

Se llama <u>probabilidad imagen</u> de $\mathbf{P}: \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, mediante la variable aleatoria X, a la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbf{P^*} &: \mathcal{P}(\Omega^*) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{A} &\mapsto \mathbf{P^*(A) = P[\,X^{-1}(A)\,]}, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{X^{-1}(A) = \{\, s \in \Omega \mid X(s) \in A \,\}}$ es un suceso de $\mathbf{\Omega}$.

De este modo, del espacio probabilístico $\mathbf{[\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P]}$ se deduce, a través de la variable aleatoria X, un nuevo espacio $\mathbf{[\Omega^*, \mathcal{P}(\Omega^*), P^*]}$, llamado <u>espacio probabilístico imagen</u> del anterior. Ahora se calculan probabilidades de sucesos de $\mathbf{\Omega^*}$, que son subconjuntos de $\mathbb{R}$.

En el supuesto de que $\Omega = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ es finito, entonces el espacio imagen

$$\mathbf{\Omega^* = X[\Omega] = Im[X] = \{\, X(s) \mid s \in \Omega \,\} = \{\, x_1 < x_2 < \dots < x_k \,\},}$$

también lo es y la función probabilidad imagen, $\mathbf{P^*}$, queda determinada (ver Teorema de pág. 95) cuando se conocen los k números reales positivos (que suman 1):

$$\mathbf{P^*(\{x_1\}), \quad P^*(\{x_2\}), \quad \dots, \quad P^*(\{x_k\}),}$$

donde

$$\mathbf{p_i = P^*(\{x_i\}) = P(}A_{x_i}\mathbf{) = P[X^{-1}(\{x_i\})] = P[\{\, s \in \Omega \mid X(s) = x_i\}]\,,}$$

y se suele denotar abreviadamente (así lo haremos en adelante) por

$$\mathbf{p_i = P(X = x_i).}$$

EJEMPLO

Sea $\mathcal{E}$ el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado dos veces consecutivas. Sobre el espacio muestral

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\} = \{\, (i,j) \mid i,j \in \{1,2,3,4,5,6\} \,\}$$

se define una función de probabilidad **P:** $\mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *asociando a cada suceso elemental (por la hipótesis de equiprobabilidad)* $\mathbf{P}\big[(\mathbf{i},\mathbf{j})\big] = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}}$. *Tenemos así un espacio probabilizado* $[\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P}]$.

*Consideremos ahora la aplicación (**<u>variable aleatoria</u>**)*

$$\mathbf{X}: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\mathbf{i},\mathbf{j}) \mapsto \mathbf{X}[(\mathbf{i},\mathbf{j})] = |\,\mathbf{i} - \mathbf{j}\,|.$$

El espacio muestral imagen de Ω por X es:

$$\Omega^* = \mathbf{X}[\Omega] = \mathbf{Im}[\mathbf{X}] = \{\, \mathbf{X}[(\mathbf{i},\mathbf{j})] \mid (\mathbf{i},\mathbf{j}) \in \Omega \,\} = \{0,1,2,3,4,5\} \subseteq \mathbb{R}.$$

*Tratándose de un conjunto finito, X es una **<u>variable aleatoria discreta</u>**.*

Dado 2		*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*
6	*(1,6)*	*(2,6)*	*(3,6)*	*(4,6)*	*(5,6)*	*(6,6)*	*1*
5	*(1,5)*	*(2,5)*	*(3,5)*	*(4,5)*	*(5,5)*	*(6,5)*	*2*
4	*(1,4)*	*(2,4)*	*(3,4)*	*(4,4)*	*(5,4)*	*(6,4)*	*3*
3	*(1,3)*	*(2,3)*	*(3,3)*	*(4,3)*	*(5,3)*	*(6,3)*	*4*
2	*(1,2)*	*(2,2)*	*(3,2)*	*(4,2)*	*(5,2)*	*(6,2)*	*5*
1	*(1,1)*	*(2,1)*	*(3,1)*	*(4,1)*	*(5,1)*	*(6,1)*	
	1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***Dado 1***

Para cada $\mathbf{x} \in \Omega^*$, $\mathbf{A_x} = \mathbf{X}^{-1}(\mathbf{x}) = \{(\mathbf{i},\mathbf{j}) \in \Omega \mid \mathbf{X}(\mathbf{i},\mathbf{j}) = |\,\mathbf{i}-\mathbf{j}\,| = \mathbf{x}\} \in \mathcal{P}(\Omega)$ *es un suceso de Ω; explícitamente*

	X
$A_0 = X^{-1}(0) = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$	$\mapsto 0$
$A_1 = X^{-1}(1) = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6);\ (2,1),(3,2),(4,3),(5,4),(6,5)\}$	$\mapsto 1$
$A_2 = X^{-1}(2) = \{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6);\ (3,1),(4,2),(5,3),(6,4)\}$	$\mapsto 2$
$A_3 = X^{-1}(3) = \{(1,4),(2,5),(3,6);\ (4,1),(5,2),(6,3)\}$	$\mapsto 3$
$A_4 = X^{-1}(4) = \{(1,5),(2,6);(5,1),(6,2)\}$	$\mapsto 4$
$A_5 = X^{-1}(5) = \{(1,6),(6,1)\}$	$\mapsto 5$

La función probabilidad imagen $\mathbf{P}^* : \mathcal{P}(\Omega^*) \longrightarrow \mathbb{R}$ *está definida por:*

$$p_0 = P^*(\{0\}) = P(A_0) = P(X=0) = 6/36$$
$$p_1 = P^*(\{1\}) = P(A_1) = P(X=1) = 10/36$$
$$p_2 = P^*(\{2\}) = P(A_2) = P(X=2) = 8/36$$
$$p_3 = P^*(\{3\}) = P(A_3) = P(X=3) = 6/36$$
$$p_4 = P^*(\{4\}) = P(A_4) = P(X=4) = 4/36$$
$$p_5 = P^*(\{5\}) = P(A_5) = P(X=5) = 2/36$$

$$\sum_{i=0}^{5} p_i = \sum_{i=0}^{5} P(X=i) = 1.$$