5 DISTRIBUCIONES BINOMIAL Y DE POISSON

INTRODUCCIÓN COMBINATORIA

Supongamos que tenemos una caja con n departamentos y n bolas de las cuales k son Verdes y n − k son Azules. Las bolas Verdes son indistinguibles entre sí, así como las Azules. Queremos colocar las n bolas en los n departamentos, una en cada uno. ¿De cuántas formas diferentes es posible hacerlo?

V	A	A	V	V	A	V	V
1	2	3	4	5	6	7	8
$n = 8;$ $k = 5;$ $n - k = 3$							

Cada colocación equivale a la elección de un subconjunto de k elementos (donde colocar las k bolas Verdes) del conjunto de n elementos {1,2,3,4, ... ,n}; el conjunto complementario del elegido consta de n − k elementos (los departamentos que ocuparemos con las n − k bolas Azules). El número de subconjuntos de k elementos que se pueden extraer de un conjunto de n elementos (k ≤ n) es el número combinatorio:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Estos son los coeficientes del desarrollo del **binomio de NEWTON:**

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k}$$

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n-2}x^2y^{n-2} + nxy^{n-1} + y^n$$

Recuérdese que: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1;$ $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n;$ $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$

Podríamos escribir el **binomio de NEWTON:** $(q+p)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL: $\mathcal{B}(n;p)$

Sea $\mathcal{B}$ un experimento aleatorio que sólo puede dar lugar a dos sucesos elementales, uno llamado **"éxito"**, **E**, y otro llamado **"fracaso"**, $\mathbf{F} = \overline{\mathbf{E}}$. Tal experimento es una **prueba de BERNOUILLI**. El espacio muestral correspondiente es $\boldsymbol{\Omega} = \{\mathbf{E}, \overline{\mathbf{E}}\}$.

Sea **p = P(E),** con **0 < p < 1**. Entonces, **q = 1 − p = P($\overline{\mathbf{E}}$),** ya que ambos sucesos son incompatibles (mutuamente excluyentes). Tenemos un espacio probabilizado **[Ω, $\mathcal{P}$(Ω), P].**

Sea $\mathcal{B}^n$ el experimento consistente en **realizar n veces una prueba de Bernouilli de forma independiente, manteniendo p constante**. El espacio muestral de $\mathcal{B}^n$ es:

$$\Omega^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \Omega = \{E, \overline{E}\}\} =$$
$$= \{(E,E,\ldots,E,E),(E,E,\ldots,E,\overline{E}),\ldots,(E,\overline{E},\ldots,E,\overline{E}),\ldots,(\overline{E},\overline{E},\ldots,\overline{E},\overline{E})\}$$

Este espacio nos proporciona otro espacio probabilizado **[Ω^n, $\mathcal{P}(\Omega^n)$, P]** una vez que conozcamos la probabilidad de cada suceso elemental. Si **$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$** es un suceso elemental que consta de **k éxitos** y **n − k fracasos**, entonces, por la hipótesis de independencia y la constancia de **p = P(E),** se tiene que

$$P(\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}) = p^k \cdot q^{n-k}$$

Consideremos ahora la variable aleatoria discreta que a cada suceso elemental **$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$** le asocia su número de éxitos:

$$X: \Omega^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mapsto X(x_1,x_2,\ldots,x_n) = k = \text{núm. de éxitos.}$$

Entonces:

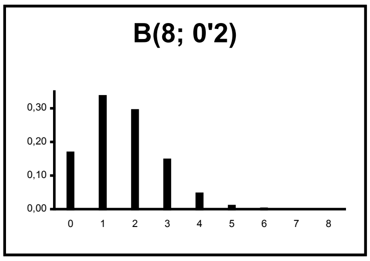
$$P(X=k) = P[X^{-1}(k)] = P[\{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid X(x_1,x_2,\ldots,x_n)=k\}] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

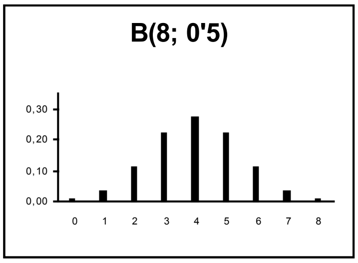
ya que $\#\{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid X(x_1,x_2,\ldots,x_n)=k\} = \binom{n}{k}$, según hemos justificado en la página anterior. Esto nos lleva a dar la siguiente **definición**:

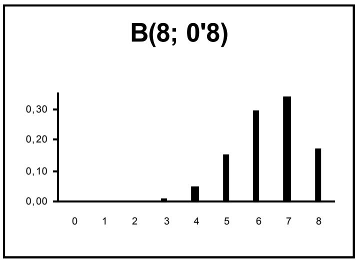
Una variable aleatoria discreta X sigue una LEY BINOMIAL $\mathcal{B}$(n; p), y se escribe X ~ $\mathcal{B}$(n; p), con 0 < p < 1, cuando su función ó ley de probabilidad es:

$$\boxed{\mathbf{b_{n,p}(k) = P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k \in \{0,1,2,3,\ldots, n\}}}$$

Mostramos a continuación los **diagramas de barras** correspondientes a tres distribuciones binomiales:







Los valores de $\mathbf{b_{n,p}(k)} = \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} \mathbf{p^k q^{n-k}}$ se encuentra tabulados. A continuación presentamos dos tablas correspondientes a distribuciones **$\mathcal{B}$(n;p):**