Estimar un parámetro poblacional, por ejemplo μ, mediante un intervalo **[a, b]** que aproxime a μ con un **nivel de confianza 1 – α** (que se elige próximo a 1, y se suele dar en porcentaje) es realizar una **estimación por un intervalo de confianza**, siendo $P\{ a \le \mu \le b \} = 1 - \alpha$; es decir

$$\boldsymbol{P\{ \mu \in [a,b] \} = 1 - \alpha}$$

Entonces $\boldsymbol{P\{ \mu \notin [a,b] \} = \alpha}$ es el **riesgo de que la media poblacional μ no esté en el intervalo [a,b]**. Al valor de α (que se suele elegir próximo a 0) se le llama **nivel de significación.**

Intervalo de confianza para la media, μ, de una distribución normal $\mathscr{N}$(μ; σ), con σ conocida

Sea Ω una población formada por un gran número de elementos y sobre ella una variable aleatoria X que sigue una ley normal $\mathscr{N}$(μ; σ), con media **μ desconocida** y desviación típica **σ conocida.**

Con el fin de estimar μ se toma una muestra aleatoria simple de tamaño n M = ($x_1,x_2,\ldots,x_n$), que proporciona una media $\bar{x}_n$, la cual es un estimador puntual de **μ.** Por el **Teorema Central del Límite** (pág. 181), sabemos que si la población es grande y n ≥ 30, entonces $\bar{x}_n$ sigue una ley normal $\mathscr{N}(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, luego la variable tipificada $Z = \frac{\bar{x}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ sigue una ley normal $\mathscr{N}$(0; 1). Sea $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ tal que $P\{ Z \le z_{1-\frac{\alpha}{2}} \} = 1 - \frac{\alpha}{2}$; es decir $\Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, donde Φ(z) es la función de distribución de la $\mathscr{N}$(0; 1), de la que contamos con su tabla. Entonces

$$P\left[- z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le Z \le z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = P\left[Z \le z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] - P\left[Z \le -z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] =$$

$$= P\left[Z \le z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] - \left(1 - P\left[Z \le z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] \right) = 2 \cdot P\left[Z \le z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] - 1 = 2 \cdot (1 - \frac{\alpha}{2}) - 1 = 1 - \alpha$$