3 (DISTRIBUCIÓN UNIFORME)

Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad, f(x), es constante en el intervalo [a,b] y 0 en R–[a,b]:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{k,} & \mathbf{si} \quad \mathbf{a \le x \le b,} \\ \mathbf{0,} & \mathbf{en\ otro\ caso.} \end{cases}$$

(Se dice que la variable X está *uniformemente distribuida* en el intervalo [a,b])

a) Determinar la constante k y representar gráficamente f(x)

b) Hallar E(X) y Var(X)

c) Determinar F(x) y representarla gráficamente.

(Tanto el valor de k como la función de distribución, F(x), se pueden determinar sin recurrir a la integral de f(x): basta el área del rectángulo correspondiente).

a) Para que $f(x)$ sea una función de densidad, además de $f(x) \geq 0$, ha de ser

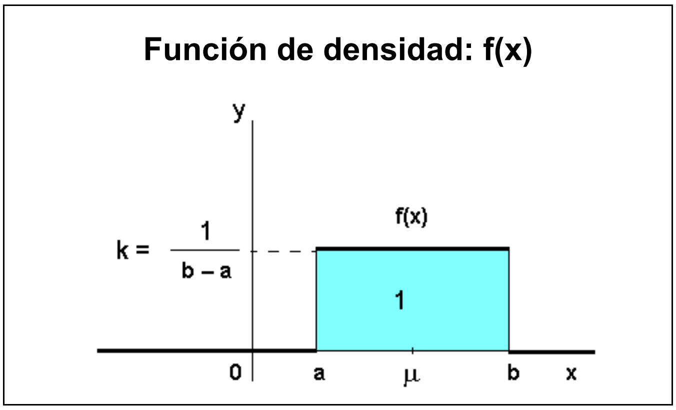
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Entonces

$$\int_a^b k\, dx = k[x]_a^b = k(b-a) = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{b-a}$$

luego
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & si \quad a \le x \le b, \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Su gráfica es



b) La media (esperanza matemática) de X es

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{b^2-a^2}{2}\right] = \frac{a+b}{2}$$