8 DESIGUALDAD DE TCHEBYCHEFF LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

1 La probabilidad teórica de que una pieza de artillería falle el blanco es constante e igual a p = 0’2. Hallar la cantidad de disparos que debe realizar para que podamos tener al menos el 95% de certeza de que la frecuencia relativa de los fallos se desvíe de p, en valor absoluto, menos de 0’03

Sea $\mathcal{E}$ un experimento aleatorio consistente en efectuar un disparo con una pieza de artillería, y sea A el suceso “el disparo falla el blanco”. Consideremos n repeticiones sucesivas e independientes de $\mathcal{E}$, y sea n_A el número de veces que se realiza A (su frecuencia absoluta). Sea $f_A = n_A / n$ la frecuencia relativa de A. Si suponemos que $p = P(A) = 0'2$ es constante en cada una de las repeticiones del experimento, entonces, el **Teorema de BERNOUILLI (Ley de los Grandes Números)** afirma que para todo $\varepsilon > 0$, se verifica

$$\boxed{P\left[\left|f_A - p\right| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{p\cdot(1-p)}{n\varepsilon^2}}$$

O, equivalentemente,

$$\boxed{P\left[\left|f_A - p\right| < \varepsilon\right] \geq 1 - \frac{p\cdot(1-p)}{n\varepsilon^2}}$$

En nuestro caso, tenemos que $p = 0'2$, $1 - p = 0'8$ y $\varepsilon = 0'03$; por tanto, será

$$P\left[\left|f_A - 0'2\right| < 0'03\right] \geq 1 - \frac{p\cdot(1-p)}{n\varepsilon^2} \geq 0'95$$

cuando

$$\frac{p\cdot(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq 0'05 \Rightarrow n \geq \frac{p\cdot(1-p)}{\varepsilon^2\cdot(0'05)} = \frac{(0'2)\cdot(0'8)}{(0'03)^2\cdot(0'05)} \approx 3555'56$$

Por consiguiente, el número mínimo de disparos es 3556

2 ¿Cuántas veces habrá que arrojar una moneda legal para que, con una probabilidad mayor o igual que 0’60, se pueda esperar que la desviación de la frecuencia relativa de la aparición de “cara” respecto de la probabilidad teórica, p = 0’5, resulte en valor absoluto menor que 0’01?

Por la **Ley de los Grandes Números:**