9 APROXIMACIONES DE LA BINOMIAL

1 Un cierto equipo electrónico está formado por 100 componentes conectados. Si cada componente tiene una probabilidad p = 0'02 de romperse cuando el equipo es lanzado en un cohete, hallar la probabilidad de que al hacerlo se rompan 3 o más de los componentes.

Sea X la variable aleatoria que define el número de componentes que se rompen. X sigue una ley binomial $\mathcal{B}$(***n* = *100*; *p* = *0'02***), luego

$$P(X=k)=\binom{100}{k}\cdot(0'02)^k\cdot(0'98)^{100-k}$$

de donde

$$P(X\geq 3)=1-P(X<3)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\right]=$$

$$=1-\left[\binom{100}{0}\cdot(0'02)^0\cdot(0'98)^{100}+\binom{100}{1}\cdot(0'02)^1\cdot(0'98)^{99}+\binom{100}{2}\cdot(0'02)^2\cdot(0'98)^{98}\right]=$$

$$=1-\left[(0'98)^{100}+100\cdot(0'02)\cdot(0'98)^{99}+4950\cdot(0'02)^2\cdot(0'98)^{98}\right]=\ldots=0'323314377$$

Ahora bien, el cálculo de estos valores es de una dificultad considerable; por eso, al ser n grande y p pequeña, es preferible aproximar por una distribución de **POISSON**:

Tenemos que $\left.\begin{matrix} n= & 100 \\ p= & 0{,}02\end{matrix}\right\}\Rightarrow \lambda=np=2$. Como $n=100\geq 100$ y $np=2<10$, la aproximación puede considerarse excelente:

$$P(X=k)\cong\frac{2^k}{k!}\cdot e^{-2}$$

$$P(X\geq 3)=1-P(X<3)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\right]=$$

$$=1-\left[\frac{2^0}{0!}\cdot e^{-2}+\frac{2^1}{1!}\cdot e^{-2}+\frac{2^2}{2!}\cdot e^{-2}\right]=1-\left[1+2+2\right]\cdot e^{-2}=1-5e^{-2}=$$

$$=1-5\cdot(0'135335283)=0'323323583$$

(La aproximación mediante la normal sería válida si n fuese grande ($n\geq 10$) y p no se aproximase demasiado a 0 ni a 1 (que sea más bien próximo a $1/2$). Si p es próximo a 0 ó a 1, n debería ser algo mayor para asegurar una aproximación aceptable. Prácticamente es necesario que $npq\geq 3$. Como en nuestro caso $npq=1'96<3$, no aproximamos mediante la normal).