

5 Una variable aleatoria, X , definida sobre una población, tiene de media 50 y de desviación típica 5. Extraemos aleatoriamente 1000 muestras, todas ellas de tamaño 64. De cada muestra calculamos su media, y llamamos A al conjunto formado por esas 1000 medias.

- Explicar qué valores se pueden esperar para la media y la desviación típica de A .
- ¿Cuál es la probabilidad de que una de esas muestras tenga una media comprendida entre 48'5 y 50'5?

a) La variable aleatoria X sigue una ley desconocida $\mathcal{L}(\mu = 50; \sigma = 5)$. Consideremos las mil muestras $M_1, M_2, \dots, M_{1000}$, todas de tamaño $n = 64$, y sea $A = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{1000}\}$ el conjunto de las mil medias respectivas. Si representamos por \bar{X}_{64} la variable aleatoria que a cada muestra de tamaño 64, extraída con reemplazamiento, le asigna su media aritmética, el Teorema Central del Límite afirma que $\bar{X} = \bar{X}_{64}$ sigue una ley normal $\mathcal{N}(\mu_{\bar{X}} = \mu = 50; \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{8})$. El conjunto A es un subconjunto del conjunto imagen de \bar{X}_{64} , es decir, un subconjunto del conjunto de las medias aritméticas de todas las muestras de tamaño $n = 64$, por lo que cabe esperar que:

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu_A \approx \mu_{\bar{X}} = \mu = 50; \sigma_A \approx \sigma_{\bar{X}} = \frac{5}{8} = 0'625)$$

b) Admitido lo anterior, tipificamos la variable \bar{X} y $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0; 1)$, luego:

$$\begin{aligned} P(48'5 < \bar{X} \leq 50'5) &= P\left(\frac{48'5 - 50}{\frac{5}{8}} < \frac{\bar{X} - 50}{\frac{5}{8}} \leq \frac{50'5 - 50}{\frac{5}{8}}\right) = \\ &= P\left(\frac{8 \cdot (-1'5)}{5} < Z \leq \frac{8 \cdot (0'5)}{5}\right) = P(-2'4 < Z \leq 0'8) = P(Z \leq 0'8) - P(Z \leq -2'4) = \\ &= P(Z \leq 0'8) - P(Z > 2'4) = P(Z \leq 0'8) - [1 - P(Z \leq 2'4)] = \Phi(0'8) + \Phi(2'4) - 1 = \\ &= 0'7881 + 0'9918 - 1 = 0'7799 \end{aligned}$$



6 Se dispone de una muestra aleatoria de 10 alumnos de 3º de ESO. Se sabe, por experiencias anteriores, que la altura de los alumnos de ese nivel se distribuye según una variable aleatoria Normal de media 167 cm y desviación típica 3'2 cm.

- Calcular la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 166 cm y la media poblacional.
- ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral tenga un valor superior a 169 cm?