11 INFERENCIA ESTADÍSTICA I (INTERVALOS DE CONFIANZA)

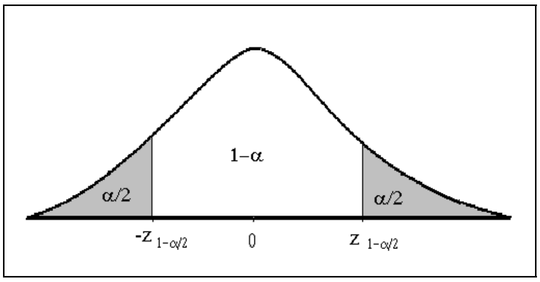
1 Los estudiantes de Bachillerato de una cierta comunidad autónoma duermen un número de horas diarias que se distribuye según una ley Normal de media μ desconocida y de desviación típica 3. A partir de una muestra de tamaño 30 se ha obtenido una media muestral de 7 horas. Hallar un intervalo de confianza, al 96%, para la media, μ, de horas de sueño.

Sea X la variable aleatoria “horas de sueño” que sigue una ley normal $\mathcal{N}(\mu;\ \sigma = 3)$, con μ desconocida. Con el fin de estimar μ se ha tomado una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 30$, $M = (x_1, x_2, ..., x_n)$, que proporciona una media $\bar{x}_{30} = 7$ h, la cual es un estimador puntual de μ. Sabemos que la población es normal, luego $\bar{x}_{30}$ sigue una ley normal $\mathcal{N}(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ y la variable tipificada $Z = \dfrac{\bar{x}_{30} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{30}}}$ sigue una ley normal $\mathcal{N}(0;\ 1)$

Sabemos también que el intervalo de confianza es

$$I = \left[\bar{x}_{30} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\quad \bar{x}_{30} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

donde $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ se calcula sabiendo que $P\{ Z \le z_{1-\frac{\alpha}{2}} \} = 1 - \frac{\alpha}{2}$



Es decir, $\Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, siendo $\Phi(z)$ la función de distribución acumulativa de la $\mathcal{N}(0;\ 1)$. Se tiene que $1 - \alpha = 0'96$, luego $\alpha = 0'04$. Entonces

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0'04}{2} = 1 - 0'02 = 0'98$$

buscando en la tabla de $\Phi(z)$, obtenemos $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2'06$, con lo que los extremos del intervalo resultan

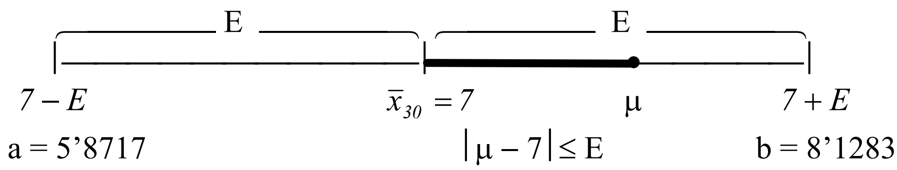
$$\begin{cases} a = \bar{x}_{30} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 7 - (2'06) \cdot \dfrac{3}{\sqrt{30}} = 7 - 1'1283 = 5'8717 \\ b = \bar{x}_{30} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 7 + (2'06) \cdot \dfrac{3}{\sqrt{30}} = 7 + 1'1283 = 8'1283 \end{cases}$$

Esto quiere decir que el parámetro desconocido, μ, tiene el *96%* de posibilidades de estar comprendido en el intervalo I = [*5'8717; 8'1283*], lo que significa que

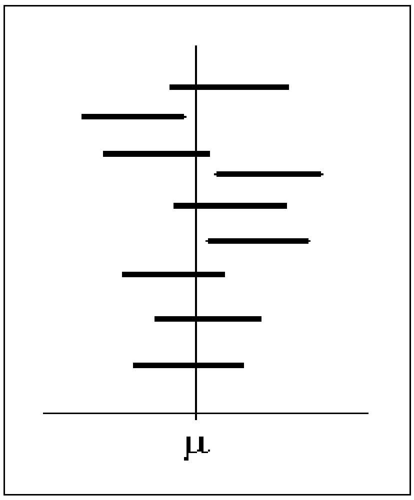
$$P(5'8717 \leq \mu \leq 8'1283) = 1 - \alpha = 0'96$$

El radio del intervalo, o error máximo, es

$$E = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = (2'06) \cdot \frac{3}{\sqrt{30}} = 1'1283, \text{ y el centro } \bar{x}_{30} = 7$$



Que **1 − α = 0'96** quiere decir que para el **100·(1 − α)% = 96%** de las muestras de tamaño 30 que tomemos y construyamos el correspondiente intervalo, éste contendrá a **μ,** y el restante **100·α% = 4%** no lo contendrá. Estos distintos intervalos tendrán <u>todos el mismo radio</u>, E, pero, al variar en cada muestra la media $\bar{x}_{30}$, sus extremos variarán, dando lugar a intervalos distintos. Como esto se hace con una sola muestra, únicamente podemos decir que tenemos la esperanza de que el intervalo que obtenemos sea uno de los que contiene a **μ,** y no haber tenido la mala suerte de que sea uno de los pocos que no lo contienen.



2 **La talla de los individuos de una población sigue una distribución Normal de media μ y desviación típica 8 cm.**

Se han determinado las tallas de una muestra de 25 individuos, encontrándose una media muestral de 168 cm. Obtener un intervalo de confianza al 95% para la media μ de la población.