12 INFERENCIA ESTADÍSTICA II (CONTRASTE DE HIPÓTESIS)

1 **El fabricante de un fármaco afirma en el bote que éste contiene 20 c.c. del mismo, ni más ni menos. Por análisis anteriores, se admite que la variable aleatoria X, cantidad de fármaco que contiene cada bote, sigue una ley normal de media 20 c.c. y desviación típica 3 c.c.**

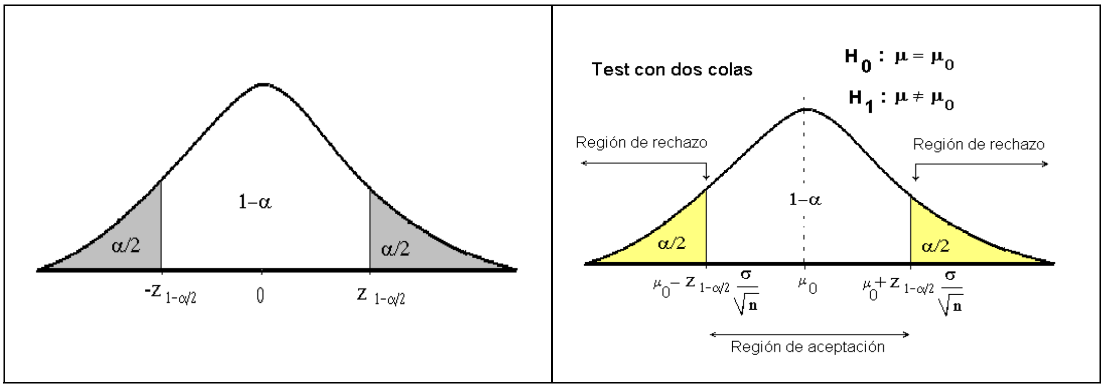
Para ver si la afirmación del fabricante es cierta, una inspección selecciona una muestra de 25 botes que arroja una media de 18'75 c.c.

¿Se puede aceptar la afirmación con un nivel de significación del 5%?

Se trata de contrastar la hipótesis nula H_0: $\mu = 20$ frente a la hipótesis alternativa H_1: $\mu \neq 20$ con un nivel de significación del 5%

Si ***H_0: $\mu = \mu_0 = 20$ es cierta,*** entonces $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0;\ 1)$, y la probabilidad de aceptar ***H_0*** es

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} < Z < z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$



$$P\left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\mu_0 - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \overline{X} < \mu_0 + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

La **región de aceptación** para ***H_0*** es, por tanto, el intervalo

$$\mathcal{R}_A = \left]\mu_0 - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \mu_0 + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

En nuestro caso $P(-z_{1-\alpha/2} < Z < z_{1-\alpha/2}) = 1 - 0'05 = 0'95$. Pero

$$P(Z < z_{1-\alpha/2}) - P(Z < -z_{1-\alpha/2}) = P(Z < z_{1-\alpha/2}) - [1 - P(Z < z_{1-\alpha/2})]$$

luego

$$2 \cdot P(Z < z_{1-\alpha/2}) - 1 = 0'95 \quad \Rightarrow \quad P(Z < z_{1-\alpha/2}) = \frac{1'95}{2} = 0'975$$

Buscando en la tabla de $\Phi(z)$, obtenemos $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1'96$. Por tanto

$$\mathcal{R}_A = \left]20 - (1'96) \cdot \frac{3}{\sqrt{25}};\ 20 + (1'96) \cdot \frac{3}{\sqrt{25}}\right[=]18'824;\ 21'176[$$

Como $\overline{x}_{25} = 18'75 \notin \mathcal{R}_A$, se rechaza la hipótesis nula $\boldsymbol{H_0}$**:** $\boldsymbol{\mu = 20}$ al nivel de significación del 5%**.** (El contraste *es significativo estadísticamente*).

2 **Se espera que la longitud X, en metros, de cierta bobina de papel suministrado por un fabricante se distribuya según una ley normal de media 220 m y desviación típica 7'75 m. Tomada una muestra de 9 bobinas del mismo tipo se obtienen las siguientes longitudes:**

209, 228, 208, 233, 223, 220, 215, 229, 203.

Contrastar la hipótesis H_0: μ = 220 frente a H_1: μ ≠ 220 con un nivel de significación del 10%

La media de la muestra es

$$\overline{x}_9 = \frac{209 + 228 + 208 + 233 + 223 + 220 + 215 + 229 + 203}{9} = \frac{1968}{9} = 218'67$$

Si $\boldsymbol{H_0: \mu = \mu_0 = 220}$ ***es cierta,*** entonces $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0;\ 1)$, y la probabilidad de aceptar $\boldsymbol{H_0}$ es

$$P(-z_{1-\alpha/2} < Z < z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$$